

Функциональные уравнения над конечными множествами

Прохоров Николай Петрович, Республика Беларусь, г. Минск, Республика Беларусь, г. Минск, ГУО "Гимназия №41 имени Серебряного В.Х.", 11"В" класс

Научный руководитель: Жибрик Евгений Витальевич, ассистент кафедры высшей математики, БГУ.

Постановка задачи. Пусть n – натуральное число, большее 1. Через Z_n обозначим множество $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ классов вычетов по модулю n , где $\overline{a} = \{a + nt \mid t \in Z\}$, $a \in Z$. Иными словами, \overline{a} – множество всех целых чисел, которые дают тот же остаток при делении на n , что и число a . Для элементов множества Z_n вводятся операции сложения и умножения следующим образом: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$. Через $G(Z_n)$ (приведённый класс вычетов) обозначим множество всех классов вычетов \overline{a} по модулю n , таких, что числа a и n взаимно просты.

Пусть A – непустое конечное множество. Через 2^A обозначим множество всех подмножеств, включая пустое подмножество, множества A . На множестве 2^A введем операции сложения и умножения: $X + Y = X \Delta Y$, $X \cdot Y = X \cap Y$, где

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ X \\ \downarrow \\ \downarrow \\ Y \end{array} .$$

$$X \Delta Y = \downarrow$$

В данной задаче нами рассматривались различные функциональные уравнения над данными множествами, как новые, так и уже решённых для функций над другими множествами (например, уравнения Коши). Основной нашей целью было нахождение решений данных уравнений и количества решений, а также нетривиальных оценок на количество решений.

Методы. В работе нами использовалось большое количество различных результатов из таких разделов математики, как теория чисел (сравнения, их свойства, Китайская теорема об остатках, Теорема и функция Эйлера, первообразные корни, индексы и т.д.) и теория групп (свойства множества подмножеств и классов вычетов, как колец и групп), комбинаторика (числа Стирлинга и т.д.).

Результаты. Нами были решены следующие функциональные уравнения и найдено количество их решений:

$$1) Af \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right) = \sum_{i=1}^r \beta_i f_i(y_i x_i), \quad f, f_i: Z_n \rightarrow Z_m, \beta_i \in Z_m, y_i \in Z_n, \alpha_i \in Z_n, \exists \alpha_{t_1}, \alpha_{t_2} \in G(Z_n);$$

$$2) Af \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right) = \prod_{i=1}^r \beta_i f_i(y_i x_i), \\ f, f_i: Z_n \rightarrow Z_m, A, \beta_i \in Z_m, y_i \in Z_n, \alpha_i \in Z_n, \exists \alpha_{t_1}, \alpha_{t_2} \in G(Z_n);$$

$$3) Af \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \right) = Bg \left(\prod_{i=1}^r \beta_i x_i \right), \quad f, f_i: Z_n \rightarrow Z_m, \\ A, B \in Z_m, y_i \in Z_n, \alpha_i \in Z_n, \exists \alpha_{t_1} \in G(Z_n);$$

$$4) f(x)f(y) = f(x) + f(y), f: Z_n \rightarrow Z_m;$$

$$5) f(X+Y) = h(X) + g(Y), f, g, h: 2^A \rightarrow 2^B;$$

$$6) f(X+Y) = h(X) + g(Y) \wedge f(X \times Y) = h(X) \times g(Y), f, g, h: 2^A \rightarrow 2^B;$$

Также нами были рассмотрены следующие уравнения:

$$1) f \left(\sum_{i=1}^r x_i \right) = \sum_{i=1}^r f_i(x_i) \wedge f \left(\prod_{i=1}^r x_i \right) = \prod_{i=1}^r f_i(x_i), f, f_i: Z_n \rightarrow Z_m;$$

$$2) \quad \begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \\ G(\mathbb{Z}^n) \rightarrow G(\mathbb{Z}^m) \\ f_i(x_i), f, f_i: \mathbb{Z} \end{array} ;$$

$$f\left(\prod_{i=1}^r x_i\right) = \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}$$

$$3) \quad \begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ f_i(x_i), f, f_i: G(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathbb{Z}_m \end{array}$$

$$f\left(\prod_{i=1}^r x_i\right) = \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}$$

Заключение. В работе был рассмотрен ряд функциональных уравнений для которых было получено большое количество нетривиальных результатов. Данные функциональные уравнения могут успешно использоваться в качестве опорных для решения и нахождения количества решений функциональных уравнений над классами вычетов, приведёнными классами вычетов, множествами подмножеств, а также различными конечными множествами изоморфными данным. Многие результаты могут также успешно использоваться в теории чисел, теории групп, а также в криптографии.

В дальнейшем хотелось бы подробнее изучить данные функциональные уравнения, а также рассмотреть новые уравнения и уравнения над другими множествами.

Литература. Бухштаб А.А. Теория чисел;