ОГРАНИЧЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Шешко Николай Андреевич (Беларусь, г. Минск, Гимназия №41, 10 класс)
Руководитель : Задворный Борис Валентинович, кандидат физ.-мат. наук, доцент, БГУ

Найдите все действительные числа a, для которых справедливо утверждение: если x – произвольное действительное число из области опеределения f, то, по крайней мере, одно из чисел x или $f(x)$ не превосходят числа a. Рассмотрите вначале частные случаи, а затем перейдите к общему случаю. Найдите все действительные числа a, для которых справедливо утверждение: если x и y произвольные действительные числа из области опеределения f, то, по крайней мере, одно из чисел x, y или $f(x, y)$ не превосходит числа a. Рассмотрите вначале частные случаи, а затем перейдите к общему случаю. Предложите и рассмотрите свои обобщения и направления для исследования. Множество всех чисел a назовем ограничением функции. Данная работа прямого практического значения не имеет, однако ее результаты могут использоваться для решения задач из области функционального анализа.

Какие либо специальные методы не использовались.

В результате исследования были получены результаты по всем вопросам задачи. Были рассмотрены некоторые интересные частные случаи, а также построен алгоритм нахождения ограничения функций для функций от n переменных.

Исходная постановка была исследована полностью, а также было предложено направление для исследования, которое может развить исходную постановку задачи, и сделать ее применимой в практике.

Никакой специальной литературы использовано не было.

ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА-ЛЕМУСА

Шиляев Иван Владимирович (Беларусь, г.Гомель, Гимназия №56, 9 класс)
Руководители: Горский Сергей Михайлович, ассистент кафедры математического анализа, УО «Гомельский Государственный Университет им. Франциска Скорины»; Мурашко Вячеслав Игоревич, студент 4 курса, УО «Гомельский Государственный Университет им. Франциска Скорины»

Постановка задачи:

1. Пусть задано положительное число n. На сторонах BC и AB треугольника ABC отмечены точки A_n и C_n соответственно, так, что $\frac{|\angle BAA_n|}{|\angle CAA_n|} = \frac{|\angle BCC_n|}{|\angle ACC_n|} = n$. Известная теорема Штейнера-Лемуса утверждает, что равенство длин биссектрис $|AA_1| = |CC_1|$ влечет равенство длин сторон $|AB| = |BC|$. Проверьте истинность утверждения: «Отрезки AA_n и CC_n имеют равные длины тогда и только тогда, когда стороны AB и BC имеют равные длины» в каждом из следующих случаев:

а) $n = 2$.
б) n – целое положительное число.
в) n – рациональное положительное число.
г) n – действительное положительное число.

2. Сформулируйте и исследуйте аналогичную задачу, когда точки A_n и C_n выбираются на прямых AB и BC соответственно так, что лучи AA_n и CC_n делят внешние углы при вершинах A и C в равных отношениях.

3. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задачи и изучите их.

Решение данной задачи является геометрическим.

Доказано, что из равенства n-сектрис следует равенство сторон. Доказано, что из равенства внешних n-сектрис не следует равенство сторон. Доказано, что из равенства чевиан, n-высот и радиусов вневписанных окружностей следует равенство сторон.

Данная задача представляет большой интерес для тех, кто знаком с теоремой Штейнера-Лемуса и для тех, кто интересуется математикой в целом.

ХАРАКТЕРИСТИКИ И СВОЙСТВА МНОГОГРАННИКОВ J_{68} J_{69} J_{70} J_{71}

Шустова Марина Мстиславовна, (Новосибирская обл., г. Новосибирск, МАОУ «Гимназия №11 «Гармония», 11 класс)
Руководитель: Ковшова Юлия Николаевна, канд. пед. наук, доцент каф. ГиМОМ ФГБОУ ВПО «НГПУ»

Ключевой задачей данного исследования было рассмотреть многогранники (J68 J69 J70 J71) из списка Джонсона, найти их площади, объемы, центры тяжести (нахождение подобных данных позволит заполнить пробелы в списке характеристик тел, так как ранее подобные значения не находились), представить в виде архитектурных сооружений. Телами (многогранниками) Джонсона названы тела из списка, составленного Норманом Джонсоном в 1966. Многогранник Джонсона представляет собой выпуклый многогранник, каждая грань которого является правильным многоугольником, но он не является Платоновым, Архимедовым телом, призмой или антипризмой.

Путем сложения площадей граней были получены площади полной поверхности многогранников. С помощью метода разбивания сложных многогранников на простые и вычисления объемов сначала составных частей характеризуемых тел а затем суммирования их, были получены формулы объема всех четырех многогранников. Для нахождения координат центров тяжести изначально были отдельно найдены координаты центров тяжести усеченных додекаэдров, являющихся основами тел J68 J69 J70 J71, и координаты центров тяжести дополнений, пятиугольных куполов. Затем, после их суммирования, были определены искомые положения центров в системе координат, исходящей из центров усеченных додекаэдров.

В результате были получены искомые формулы площадей, объемов и центров тяжести. Пример полученных результатов: площади рассматриваемых многогранников. $SJ68 \approx 102{,}182a^2$, $SJ69 = SJ70 \approx 101{,}150a^2$, $SJ71 \approx 102{,}475a^2$, где а – длина ребра многогранника. Делая вывод об отношении площадей рассматриваемых многогранников, заключаем, что различия
небольшие. Создан начальный этап проекта (макет) современного центра исследований разноширотных флоры и фауны, где здания, составляющий центр, являются исследуемыми мной многогранниками Джонсона. Попутно было предположено тело, похожее на рассматриваемые многогранники, которое обладает наибольшей устойчивостью.

Таким образом, все цели, поставленные на данном этапе, были выполнены. Следует отметить, что результаты, полученные в ходе исследования, уникальны: многогранники Джонсона не рассматривались ранее настолько досконально. Планируется продолжение исследований по данной теме в рамках изучения многогранников, составленных из этих тел, либо предпринять попытку разработать узловые крепления для каркаса зданий, имеющих форму исследуемых многогранников. Это позволит применять многогранники J68 J69 J70 J71 в архитектуре.

ЗАГАДКА УБЫВАЮЩИХ СТЕПЕНЕЙ

Соколова Екатерина Павловна (Мурманская область, г. Североморск МБОУ СОШ №10 им. К.И. Душенова, 9класс)
Руководитель: Нирян Людмила Владимировна, учитель математики МБОУ СОШ №10 им. К.И. Душенова

Вопрос исследования возник в ходе знакомства с книгой математических задач «Увлекательная математика» Иоханнеса Лемана, в которой и было обнаружено одно, на первый взгляд, обычное задание. Смысл его заключался в поиске трехзначных чисел с неповторяющимися цифрами и удовлетворяющими представленному там уравнению: $\boldsymbol{a^2 - в^2 - c^2 = a - в - c}$. Оказалось, что такие числа существуют и их всего четыре. При этом, само уравнение не лишено некоторого изящества с точки зрения математического построения: степени в нем уменьшаются, убывая на единицу. Казалось, что, возможно, оно вообще одиноко в своем мире, в смысле наличия хоть каких-то решений у подобных ему уравнений. Продолжительные поиски во всех доступных источниках не привели к какому-либо результату, поэтому было решено самостоятельно разобраться с ближайшим «окружением» этого уравнения. А вдруг у его ближайших «родственников» тоже есть свои интересные решения? Таким образом, была поставлена задача: изучить все возможные виды уравнений, подобных исходному, обобщив для всех возможных значений неизвестных в нем и степеней.

Прибегая к таким методам и путям поиска решений, как: алгебраические преобразования, конечный перебор, свойства монотонных функций, цель была достигнута. Были найдены абсолютно все уравнения, схожие по структуре и построению с исходным, также имеющие решения (согласно условию, представленному в первоисточнике). Оказалось, что для всего семейства рассматриваемых уравнений (а также и его самого) существует 2151 набор цифр, полностью удовлетворяющих условиям.

Остается добавить, что вся работа с ее результатами может служить не только хорошим наглядным примером в теории математических обобщений, но и быть взятой на вооружение в решении какой-нибудь технической проблемы, связанной с моделированием ситуации с цифрами. А главное, у нее есть достаточно интересное продолжение, связанное, например, с ситуацией увеличения разрыва между показателями степеней в левых и правых частях уравнений. Но это - уже другая история, тоже интересная и увлекательная.

КОММУТАТОРНАЯ ДЛИНА ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ В ТЕРМИНАХ ГРУППОВОГО КОЛЬЦА

Вагнер Максим Вадимович, Соликов Павел Дмитриевич (Санкт-Петербург, ГБОУ СОШ №564, 11 класс)
Руководитель: Зайковский Анатолий Александрович, студент СПбГУ

Пусть G — группа и $[G,G]$ — её коммутант, то есть группа, порождённая коммутаторами $[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$. Тогда любой элемент из коммутанта представляется в виде произведения коммутаторов. Наименьшее число коммутаторов необходимое для представления элемента $g \in [G,G]$ называется коммутаторной длиной g и обозначается через $Cl(g)$.

Цель нашей работы заключается в создании аппарата для перенесения работы с обычной коммутаторной длиной из группы G в групповое кольцо $\mathbb{Z}G$. Мы даём эквивалентное определение коммутаторной длины для элемента из $[G,G]$, которое не использует понятие коммутатора в группе, но использует понятие кольцевого коммутатора в групповом кольце.

Сформулируем строго наш основной результат. Пусть G — произвольная группа. Для двух элементов x, y из группового кольца $\mathbb{Z}G$ обозначим через $[x,y]_{\mathsf{rng}}$ их кольцевой коммутатор

$$[x,y]_{\mathsf{rng}} = xy - yx.$$

Можно доказать, что для любого элемента $g \in [G,G]$ существуют такие $g_i, h_i, f_i \in G, 1 \le i \le n$ что

$$g - 1 = g_1[h_1, f_1]_{\mathsf{rng}} + \dots + g_n[h_n, f_n]_{\mathsf{rng}}.$$

Наименьшее такое n назовём кольцевой коммутаторной длиной g и обозначим через $Cl_{\mathsf{rng}}(g)$. Цель нашей работы доказать, что для любого $g \in [G,G]$. Имеет место равенство

$$Cl(g) = Cl_{\mathsf{rng}}(g-1).$$

Таким образом, кольцевая коммутаторная длина совпадает с обычной, и это лишь другое определение известного объекта.

Доказанное нами эквивалентное определение полезно тем, что теперь "кирпичики"из которых всё "собирается"уже не умножаются в (некоммутативной) группе, а складываются в групповом кольце. Поэтому не нужно заботиться о том, в каком порядке мы их расставим. Мы надеемся, что преимущества этого определения дадут ряд продвижений в общей теории коммутаторной длины.

Для упрощения доказательства равенства $Cl(g) = Cl_{\mathsf{rng}}(g-1)$ мы разбили задачу на 4 действия. Из доказательства этих утверждений непосредственно вытекает основная теорема.

1° если $g \in [G,\ G]$, то $g - 1 \in [I,\ I]_{\mathsf{rng}}$;

2° если $Cl(g) = 1$, то $Cl_{\mathsf{rng}}(g-1) = 1$;

3° $Cl(g) \ge Cl_{\mathsf{rng}}(g-1)$;

4° $Cl(g) \le Cl_{\mathsf{rng}}(g-1)$.

НОВЫЕ СВОЙСТВА КОНХОИД

Солошенко Мария Александровна (Новосибирская область, город Новосибирск, МАОУ «Гимназия №11 «Гармония», 11 класс)
Руководитель: Ковшова Юлия Николаевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры ГиМОМ ФГБОУ ВПО "НГПУ"

Цель работы – исследование нестандартных свойств конхоид. Конхоида кривой — плоская кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении радиус-вектора каждой точки данной плоской кривой на постоянную величину. Исторически конхоида применялась для решения задач о трисекции угла и удвоения куба. На данный момент в литературе представлено всего три семейства конхоид: улитка Паскаля (конхоиды окружности), конхоида Никомеда и конхоида Слюза (конхоиды прямой). При этом свойства конхоид практически не изучены. Однако область применения конхоид огромна: благодаря их форме и принципам образования, конхоиды используются в механизмах, в архитектуре, в дизайне, в создании графических программ, в компьютерном моделировании. Вследствие этого исследование конхоид является актуальным.

В ходе исследования самостоятельно были 1) изучены сведения о конхоидах, представленные в литературе и интернете, 2) построены уникальные графики конхоид в полярной системе координат с помощью онлайн-программы на сайте http://yotx.ru/, а так же вручную в декартовой и полярной системах координат, 3) исследованы графики конхоид на основе алгоритма исследования функций, представленного в учебниках математики А.Г. Мордкович.

В результатах исследования были самостоятельно выявлены и сформулированы восемь свойств конхоид, ранее не описанных в доступной литературе. Таким образом, была достигнута поставленная цель.

Полученные свойства значительно помогают сформировать представление о конхоидах и их значимости, что буквально заполняет «белое пятно» на карте математики. Прежде всего конхоиды можно использовать в архитектуре и транспортной сфере для построения транспортных развязок. В дальнейшем планируется открыть дополнительные свойства конхоид, сконструировать и построить мини-конхоидограф (прибор для построения конхоид), найти применение конхоидам в быту.

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА,СВЯЗАННЫЕ С НЕКОТОРЫМИ ЭКСТРЕМУМАМИ

Тимофеев Даниил Васильевич (Московская область, город Сергиев Посад МБОУ "Физико-математический лицей ,10 класс)
Руководитель: Забавин Валерий Николаевич, доктор физико-математических наук, начальник лаборатории.

Точка называется центральной, если её барицентрические координаты как функции длин сторон обладают свойствами цикличности, симметрии по двум аргументам и однородностью. В энциклопедии, составленной профессором Кларком Кимберлингом, количество центральных точек превышает 5000. Она содержит как точки, известные ещё Евклиду, так и точки, открытые в настоящее время. Равносторонний треугольник называется вписанным в данный произвольный треугольник, если две его вершины лежат на двух сторонах данного треугольника, а третья на стороне или её продолжении. Равносторонний треугольник называется вневписанным для данного произвольного треугольника, если две его вершины лежат на продолжениях сторон данного треугольника, а третья на стороне или её продолжении.

В работе используются методы, не выходящие за рамки школьной программы по алгебре и геометрии.

Барицентрические координаты, найденных точек удовлетворяют условиям, сформулированным выше, значит, найденные точки – центральные. Эти две точки отсутствуют в энциклопедии профессора Кимберлинга.

Возможные пути развития задачи: выяснить, какие ещё центральные точки связаны с другими экстремумами.

ЛИНЕЙНЫЙ ОТВЕТ ДЛЯ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ МАЛОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ

Тодоров Евгений Игоревич (Санкт-Петербург, ГБОУ СОШ №546, 11 класс)
Руководитель: Тодоров Дмитрий Игоревич, к. ф.–м. н., Aix-Marseille Université

Динамические системы возникают во многих научных дисциплинах при моделировании процессов, изменяющих свое состояние с ходом времени. Важный их класс, связанный со статистической физикой, — хаотические динамические системы, то есть неустойчивые по Ляпунову системы, для почти всех траекторий которых существует одинаковая статистика. Математический анализ поведения таких систем бурно развивается, начиная со второй половины двадцатого столетия. В частности, для растягивающих отображений окружности гладкости C^3 было доказано наличие важного для приложений свойства — так называемого линейного ответа (дифференциируемой зависимости статистического поведения системы от параметра). В данной работе изучается наличие этого же свойства в ситуации малой регулярности ($C^{1+\alpha}$), а именно — для одного примера растягивающего отображения окружности — растягивающего эндоморфизма окружности, возмущенного первообразной к функции Вейерштрасса.

В этой работе был проведен численный эксперимент с использованием математического пакета *Sage* со встроенным интерфейсом работы с длинной арифметикой из библиотеки *The GNU Multiple Precision Complex Library* для обеспечения точности вычислений.

Нами было рассмотрено утроение окружности, возмущ□нное первообразной к функции Вейерштрасса с фиксированными параметрами. Численный эксперимент показал, что ньютоновы частные параметризованных эргодических средних вдоль длинного куска орбиты ограничены и сходятся. Данное поведение свойственно для систем, имеющих линейный ответ. Это позволяет выдвинуть гипотезу о наличии доселе неизвестных механизмов существования линейного ответа.

Данная работа может служить отправной точкой для дальнейших исследований поставленной задачи, а так же стать подспорьем в разработке методов строгого доказательства наличия линейного ответа для систем малой регулярности, что позволит расширить область применения теории хаотических динамических систем в статистической физике.

ФОРМУЛА ПИКА

Ульянов Петр Александрович(Республика Беларусь, Витебск, ГУО «Гимназия №1 г.Витебска», 11 класс)
Руководитель: Наумик Михаил Иванович, доцент, кандидат физико-математических наук, ВГУ имени П.М. Машерова

В данной работе рассматривается формула Пика, позволяющая быстро и точно считать площадь многоугольников на целочисленной решетке, используя лишь 2 переменные: число узлов на границе и внутри многоугольника, а также некоторые обобщения данной формулы.

Методы, использованные в работе, доказывают предполагаемые факты на частных примерах, после чего делается переход к общим случаям.

В ходе работы была доказана формула Пика, а также получены обобщения для многоугольников с вырезанными «дырками», а также аналог формулы Пика для треугольной решетки.

В итоге были получены интересные формулы для быстрого подсчета площадей многоугольников, которые можно использовать в математике, картографии, алгоритмизации и других областях.

ГЕОМЕТРИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ

Вишняков Станислав Игоревич (Тюменская область, г. Тюмень, ФГКОУ «Тюменское президентское кадетское училище», 8 класс)
Руководитель: Харитонова Ирина Владимировна, преподаватель математики высшей категории, ФГКОУ « Тюменское президентское кадетское училище»

Актуальность и просто жизненная необходимость: умение решать задачи на движение различными способами: алгебраическим и геометрическим. Цель: Исследование возможности применения геометрического подхода при решении задач на движение. Задачи работы: 1.Решить задачи на «движение» алгебраическим и геометрическим методами; 2. Сравнить результаты этих методов. Гипотеза: Если использовать геометрический метод при решении задач на движение, то увеличивается вероятность правильного решения задачи повышенного уровня.

При решении стандартных задач нестандартными методами появляется интерес к изучению предмета, показывается его применение в реальной жизни и доказывается необходимость интеграции алгебры и геометрии. Если использовать геометрический метод при решении задач на движение, то увеличивается вероятность правильного решения задачи повышенного уровня. Чтобы это доказать были отобраны 5 задач, решены алгебраическим и геометрическим методом и проведен сравнительный анализ решения разными способами.

Применение эмпирических и теоретических методов исследования позволяет всесторонне изучить исследуемую проблему. Собственный эксперимент позволил проверить геометрический метод решения задачи на движение и получить результат. При решении задачи алгебраическим методом вызвало затруднение составление уравнения или систем уравнений, а при геометрическом - сложностей не возникло. Значит, в некоторых случаях нужно использовать геометрический метод решения задач на движение, как альтернативу алгебраическому.

Доказан положительный опыт по использованию геометрического метода решения задач на «движение». Этот метод не только позволяет получить верный ответ, он еще развивает мышление, воспитывает терпение, настойчивость, волю, способствует пробуждению интереса к самому процессу поиска решения, дает возможность испытать глубокое удовлетворение, связанное с удачным решением.

ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ КОРНЯХ УРАВНЕНИЙ

Зарецкий Артем Вячеславович, Лебедев Андрей Дмитриевич (Беларусь, г.Гомель, ГУО "Гимназия №56", 10 "М" класс)
Руководитель: Горский Сергей Михайлович, ассистент кафедры математического анализа ГГУ им. Ф. Скорины

1. Известно, что уравнение $x^4 + ax^3 + 29x^2 + bx + 4 = 0$ с рациональными коэффициентами имеет корнем число $2 + \sqrt{3}$. Найдите остальные корни этого уравнения.
2. Обоснуйте следующий алгоритм нахождения рациональных корней уравнения вида $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ с целыми коэффициентами (если они, конечно, существуют): если x_0 — рациональный корень такого уравнения, то он обязательно равен $x_0 = \frac{p}{q}$, где p – делитель свободного члена (т.е. a_0), а q – делитель a_n. Распространите этот алгоритм на такие же уравнения с рациональными коэффициентами.
3. Попробуйте предложить алгоритм определения (с обоснованием) корней вида $a + b\sqrt{2}$, $a + b\sqrt{3}$, ... где a, $b \in \mathbb{Q}$, для таких уравнений (по крайней мере, постройте алгоритмы определения таких корней).
4. Может, вы сможете определять корни более сложного вида $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ или $a + b\sqrt[3]{2}$?
5. Предложите алгоритм определения корней исходя из их общего вида, такого как $a + b\sqrt{m}$, $a + b\sqrt{m} + c\sqrt{k}$ и т.п., где m, k,... — заранее неизвестные натуральные числа.
6. Попробуйте оценить сложность предлагаемых алгоритмов.
7. Рассмотрите корни уравнений еще более сложного вида (с корнями различных степеней или с «композицией» корней и т.п.).
8. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их (например, попробуйте рассмотреть подобные задачи для систем уравнений с двумя и более переменными, а также уравнения с коэффициентами из множества $Q_{\sqrt{2}} = \{x + y\sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Q}\}$?.

ВЫСШИЕ ТОЖДЕСТВА ЯКОБИ

Алексеев Илья Сергеевич (г. Санкт-Петербург, ГБОУ СОШ 564, 11 класс)
Руководитель: Иванов Сергей Олегович, к.ф.-м.н., Лаборатория имени П.Л.Чебышева.

Алгебра Ли — объект абстрактной алгебры, который естественно возникает в теории групп Ли, в комбинаторной теории групп и других областях алгебры и геометрии. В этой статье мы получили большой класс красивых соотношений, выполняющихся в произвольной алгебре Ли, и подробно описали их структуру. Алгебра Ли определяется как векторное пространство L над некоторым полем k, с билинейной операцией $L \times L \to L$, которая обозначается скобкой $(x, y) \mapsto [x, y]$ и удовлетворяет тождествам $[x, x] = 0$ и $[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0$, где, по определению, $[x_1, \dots, x_n] \coloneqq [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$ — левонормированный коммутатор. Из первого тождества можно получить тождество $[x_1, x_2] + [x_2, x_1] = 0$, а второе тождество называется тождеством Якоби. Заметим, что тождество

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_2, x_3, x_4, x_1] + [x_3, x_4, x_1, x_2] + [x_4, x_1, x_2, x_3] = 0$$

не выполняется в произвольной алгебре Ли. Возникает вопрос, существуют ли соотношения подобного типа (комбинации левонормированных коммутаторов с единичным коэффициентом) для произвольного количества элементов. При попытке более строго сформулировать этот вопрос, возникли две задачи, для постановки которых нам потребуется несколько определений. Пусть T — подмножество в симметрической группе S_n. Назовём T Якобиевым подмножеством, если тождество

$$\sum_{\sigma \in T} [x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}] = 0 \tag{1}$$

выполнено в любой алгебре Ли. Например, тождества, которые определяют алгебру Ли, эквивалентны тому, что подмножества $\{\mathsf{id}, (1,2)\}$ и $\{\mathsf{id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$ Якобиевы в S_2 и S_3 соответственно. Задача 1: Найти как можно больше Якобиевых подмножеств. Обозначим через γ_n векторное подпространство алгебры некоммутативных многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ над $\mathbb{Q}$, порождённое мономами $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$, где σ из S_n. Зададим линейное отображение $\beta_n : \gamma_n \longrightarrow \mathbb{Q}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ на базисе по формуле $\beta_n(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}) = [x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$. Тогда определяющие алгебру Ли тождества эквивалентны равенствам $\beta_2(x_1 x_2 + x_2 x_1) = 0$ и $\beta_3(x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_1 + x_3 x_1 x_2) = 0$. Для подмножества T в S_n рассмотрим следующий элемент $\mathsf{Sum}(T) = \sum_{\sigma \in T} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$. Из (1) легко видеть, что T Якобиево тогда и только тогда, когда $\beta_n(\mathsf{Sum}(T)) = 0$, причём соответствующие элементам $\mathsf{Sum}(T)$ тождества будут являться простыми и красивыми. Задача 2: Найти базис $\mathrm{Ker}(\beta_n)$, состоящий из элементов вида $\mathsf{Sum}(T)$ или доказать, что такого не существует.

Основные результаты. Для любых натуральных k, l, n таких, что $k + l \le n$, явно построены Якобиевы подмножества $T_{k,l,n}$ в S_n. Наиболее интересны из них подмножества $T_{k,l,k+l}$ в S_{k+l}, которые мы обозначим через $T_{k,l}$. Например, рассмотрим тождество, соответствующее Якобиеву подмножеству $T_{2,2}$:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_2, x_1, x_4, x_3] + [x_3, x_4, x_1, x_2] + [x_4, x_3, x_2, x_1] = 0.$$

Заметим, что объединение двух непересекающихся Якобиевых подмножеств является Якобиевым, и, если T Якобиево, то и σT Якобиево для любого $\sigma \in S_n$. Это даёт нам обширный класс Якобиевых подмножеств. В частности, из этого можно вывести, что S_n и A_n Якобиевы при $n \ge 3$. Тем самым решена задача 1. Кроме того, доказано, что множество

$$\left\{ \mathsf{Sum}(\sigma \circ T_{k,1,n}) \mid 1 \le k \le n-1,\ \sigma \in S_n,\ \sigma(k+1) = 1 \right\}$$

образует базис $\mathrm{Ker}(\beta_n)$. Таким образом, решена задача 2.

Работа выполнена при поддержке Джимми Пейджа, Сида Барретта, Лу Рида, Джона Фогерти, Джона Долтри, Джима Моррисона, и группы Eagles. Отдельная благодарность Павлу Соликову, Роберту Планту, коллективу Pink Floyd, Бобу Дилану и Дэвиду Боуи.

КАРКАСНО-ВПИСАННАЯ СФЕРА

Андряков Николай Сергеевич, Российцева Анастасия Константиновна (г. Санкт-Петербург, ГБОУ СОШ №644 11класс)
Руководитель: Попова Татьяна Григорьевна, кандидат пед. наук, учитель математики ГБОУ СОШ №644

Задачи:

Определить расположение центра каркасно-вписанной сферы в правильной треугольной призме, правильного тетраэдра.

Сформулировать и доказать ряд теорем о существовании каркасно-вписанной сферы для правильной треугольной призмы.

Провести сравнительный анализ формул радиусов вписанной, описанной и каркасно-вписанной сфер, найти их связь для правильной треугольной призмы, правильной треугольной пирамиды.

Рассмотреть ряд задач на каркасно-вписанную сферу.

Методы:

3D модели фигур, изображенных в работе, были созданы в программе SketchUp 2015. Фигуры были составлены из отрезков и дуг. Отрезки были созданы с помощью команды "Line", с точно заданным значением длины линии. Составленные из них геометрические фигуры создавались путем соединения нескольких отрезков между собой. Дуги были созданы с помощью команд "3 Point Arc" и "2 Point Arc". Сферы, строящиеся на их основе, были созданы с помощью команды "Follow me".

Результаты:

Выполнены все задачи. Рассмотрено применение в архитектуре. Выяснена полезность (не только актуальность) данной темы.

Заключение:

Работая над темой исследования, мы рассмотрели нахождение радиусов сфер в зависимости от их расположения (вписанная, описанная, каркасно-вписанная). Также доказали основную теорему каркасно-вписанной сферы. Показали, что в данной литературе, особенно у Соболева С.К. «Пособие для поступающих в МГТУ имени Баумана Н.Э.» имеется материал, дающий возможность более глубоко исследовать данную тему и понять её важность. В данной работе было проведено:

сравнительный анализ взаимного расположения сферы и многогранника (вписанная, описанная, каркасно-вписанная);

исследование о расположении центров сферы (вписанной, описанной, каркасно-вписанной) в комбинации с правильной призмой;

представлен метод вычисления радиусов данных сфер.

В работе также рассматривается комбинация каркасно-вписанной сферы с тетраэдром.

Тема исследования была представлена через практическое применение – решение некоторых типологий задач.

Данная работа «Каркасно-вписанная сфера» может явиться основой для более глубоких изысканий в области сфер (шаров) с многогранниками.

Материал исследования также можно использовать на факультативных занятиях (курсах подготовки к ЕГЭ).

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОЛЛАТЦА

Баранова Марина Сергеевна (г. Санкт-Петербург, ГБОУ СОШ №277, 11 класс)
Работа выполнена без научного руководителя

Задачей данной работы был поиск путей доказательства гипотезы Коллатца, относящейся к теории чисел. Для этого поставлены задачи – рассмотреть возможности существования нетривиальных циклов и расходящихся последовательностей для натуральных чисел; установить связи между числами в последовательностях Коллатца.

В процессе работы все натуральные числа были представлены в виде суммы степеней с основанием 2 и распределены по группам в зависимости от количества шагов до n_x члена последовательности, такого, что $n_x < n_1$. Рассмотрены числа, для которых количество шагов до n_x члена последовательности не определено общей группой.

В результате проведенного исследования гипотеза Коллатца была доказана для большинства натуральных чисел (при условии истинности ее для оставшихся недоказанными чисел).

Благодаря проведенной работе упрощена проверка чисел на наличие нетривиальных циклов и расходимость – необходимо проверять только ~35 чисел из 1000, а обнаруженные свойства последовательностей Коллатца потенциально могут помочь окончательно доказать гипотезу Коллатца.

В процессе работы использовались материалы интернет-энциклопедии Wikipedia.

КОНЦЕПЦИЯ РАВНОВЕСИЯ ПО БЕРЖУ В ОЛИГОПОЛИИ БЕРТРАНА

Бойков Алексей Дмитриевич (Челябинская область, г.Челябинск, ГБУ ОШИ «ЧОЛИ», 11 класс)
Руководитель: Кудрявцев Константин Николаевич, кандидат физико- математических наук, Южно-Уральский государственный университет

В работе рассматривается новое в теории игр понятие – равновесие по Бержу. Данное понятие раньше почти не применялось к экономическим приложениям. Целью работы является показать, что концепция равновесия по Бержу, в некоторых случаях, может быть более эффективной, чем равновесие по Нэшу. Рассмотрена одна из классических моделей ценообразования на рынке дифференцированного товара с тремя продавцами – олигополия Бертрана, формализованная как бескоалиционная игра трех лиц.

Для указанной игры построены равновесие по Нэшу (широко применяемое в теории игр понятие решения) и равновесие по Бержу. Произведен анализ полученных решений и выигрышей игроков при применении соответствующих равновесий.

Произведен анализ полученных решений и выигрышей игроков при применении соответствующих равновесий. Найдены ограничения на параметры рассматриваемой модели, при выполнении которых равновесие по Бержу приносит игрокам выигрыши, большие чем их выигрыши в ситуации равновесия по Нэшу.

В работе впервые показано, что равновесие по Бержу в классической олигополии Бертрана может быть более эффективным, чем равновесие по Нэшу.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРИОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СОСТОЯНИЙ КУБИКА РУБИКА ПРИ УПОРЯДОЧЕННОМ ВРАЩЕНИИ ЕГО ГРАНЕЙ

Часнык Илья Русланович (Мурманская область, Кольский район, н.п. Зверосовхоз, МОУ Зверосовхозская СОШ, 9 класс)
Руководители: Абашкин Алексей Николаевич, учитель МОУ Зверосовхозская СОШ, Кудринская Наталья Валерьевна, учитель МОУ Зверосовхозская СОШ

В своих предыдущих исследовательских работах я сделал вывод о причинах появления чисто периодических последовательностей: если последовательность составлена из объектов, число которых конечно и определена операция, однозначно определяющая переход от одного объекта к следующему и обратно, то такая последовательность является чисто периодической. В качестве примера такой последовательности я рассмотрел последовательности состояний кубика Рубика при упорядоченном вращении его граней. При таких вращениях кубик из собранного состояния через несколько повторений собирается вновь. Если вращать средний вертикальный слой вниз, а средний горизонтальный слой влево, то кубик соберётся через 12 пар повторений. Если вращать две соседние грани в разные стороны, то кубик соберется через 63 пары вращений. Если вращать три боковые грани в одну сторону, то кубик соберется через 90 троек поворотов. Каждый такой эксперимент требует сосредоточения при его выполнении и нескольких повторений. Можно разбить каждое вращение на несколько внутренних последовательностей – последовательности, возникающие при вращении угловых и реберных кубиков. Их может быть два или более. Зная период каждой из этих последовательностей T1; T2; … период последовательности состояний кубика Рубика при таких вращениях вычисляется по формуле T = НОК (T1; T2; …). Но и непосредственное выполнение эксперимента, и аналитическое нахождение периода через разбиение на внутренние последовательности требует значительных временных затрат. Цель исследования – создать компьютерную программу, вычисляющую период последовательности состояний кубика Рубика при упорядоченном вращении его граней.

В ходе исследования были использованы следующие методы: создание и изучение математической и компьютерной моделей кубика Рубика.

В результате проделанной работы я смог создать математическую модель кубика Рубика. На основе этой модели я рассмотрел, как различные ходы изменяют эту модель.

В итоге полученные результаты я использовал при создании компьютерной программы, которая вычисляет количество повторений комбинации ходов, возвращающей кубик в исходное (нулевое) состояние. На основе этой программы можно решать и другие задачи, связанные с кубиком.

SL_2-ФАКТОРИЗАЦИИ СКРУЧЕННЫХ ГРУПП ТИПА ЛИ

Давладов Дмитрий Евгеньевич, Михайлов Илья Тимофеевич (Санкт-Петербург, ГБОУ СОШ 564, 11)
Руководитель: Смоленский Андрей Вадимович (ассистент математико-механического факультета СПбГУ)

В настоящей работе исследуются факторизации конечных групп типа Ли в терминах подгрупп, изоморфных SL_2. Такие разложения хорошо изучены для групп Шевалле нормальных типов, в то время как для скрученных групп существующие доказательства носят неявный характер и дают далекую от точной оценку длины факторизации. В настоящей работе даётся более точная оценка длины факторизации.

Для поиска ответа на поставленную задачу были доказаны теоремы и использовались леммы, доказанные при исследовании этой проблемы до нас.

В результате исследования была дана гораздо более точная оценка длины факторизации группы SU_3, чем она была до этого.

О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Дичина Регина Павловна (Нижегородская область, г. Саров, МБОУ Лицей № 3, 10 класс)
Руководитель: Столяров Игорь Васильевич, учитель математики и информатики,
МБОУ Лицей № 3

В данной работе рассматриваются особенности применения метода математической индукции при доказательстве ряда теорем в теории чисел Фибоначчи.

С применением метода математической индукции на основании рекуррентных соотношений, связывающих каждые три соседних числа Фибоначчи и симметричные гиперболические функции Фибоначчи в данной работе были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Все числа ряда Фибоначчи лежат в проекции Золотого Шофара на плоскости XOY.

Для доказательства теоремы 1 все множество чисел Фибоначчи было разбито на четыре подмножества: четные числа Фибоначчи (симметричный синус Фибоначчи $sFs(x)$), нечетные числа Фибоначчи (симметричный косинус Фибоначчи $cFs(x)$), четные расширенные и нечетные расширенные числа Фибоначчи в сторону отрицательных значений индекса n. Для каждого из множеств по методу математической индукции (с переходом к натуральному индексу) на основании рекуррентных соотношений были доказаны соответствующие равенства, связывающие каждые три соседних числа Фибоначчи.

Теорема 2. Трехмерная спираль Фибоначчи лежит на Золотом Шофаре, в плоскости XOY она проецируется в квази-синусоидальную функцию Фибоначчи и пересекает плоскость XOY в точках, которые соответствуют числам Фибоначчи.

Особенности применения метода математической индукции при доказательстве теоремы 2 заключаются в том, что для комплексного представления трехмерной спирали Фибоначчи были отдельно доказаны соответствующие соотношения для действительной и мнимой части.

Развитие нового («непрерывного») подхода к «Теории чисел Фибоначчи»состоит в том, что она является вырожденным, «дискретным» случаем «теории гиперболических функций Фибоначчи и Люка», а любому «непрерывному» тождеству для гиперболических функций Фибоначчи и Люка соответствует некоторое «дискретное» тождество для чисел Фибоначчи и Люка и наоборот.

ТРЕУГОЛЬНИКИ В НОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Доминов Максим Евгеньевич (Санкт-Петербург, школа им. С. Т. Шацкого, 10 класс)
Руководитель: Киселев Николай Андреевич, студент магистратуры СПбГУ

Целью данной работы было изучить взаимосвязь между полупериметром треугольника и радиусом вписанной в него окружности при условии, что радиус описанной вокруг треугольника окружности равен 1 и найти возможные дополнительные соотношения по результатам построения зависимости радиуса вписанной окружности от полупериметра треугольника.

Для решения данной задачи было необходимо придумать, как связать между собой стороны треугольника с радиусом вписанной окружности и полупериметром для получения точных зависимостей. Для этого использовались теоремы синусов и косинусов и формула Герона.

В данной работе найдены зависимости радиуса вписанной в треугольник окружности от его полупериметра при дополнительном условии, что треугольник вписан в окружность радиуса 1. Кроме того, построены соответствующие графики и получено дополнительное соотношение, позволяющее связать треугольники, вписанные в одну окружность и имеющие общую сторону.

Выполненная задача является первым шагом в основе понимания обработки полученных данных для последующего изучения реализации решений более масштабных задач, в которых важна не столько сложность, сколько объем вычислений и наглядность изображения полученных результатов, в том числе в виде анимации в таких пакетах математических программ как Matlab, Maple и им подобных.

О КОЛИЧЕСТВЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Дзюбенко Василий Александрович (г. Волгоград, МОУ гимназия №1, 11 класс)
Руководитель: Лецко Владимир Александрович, к. п. н., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического анализа Волгоградского государственного социально-педагогического университета.

Целью нашей работы является нахождение и исследование последовательных натуральных чисел, количества делителей которых отвечают заданным условиям, а также поиск ответа на вопрос, насколько длинными могут быть такие последовательности. В частности, рассматривались последовательные числа с одинаковым количеством делителей. Этот вопрос ранее уже исследовался, однако нами были получены новые результаты. Помимо того, в работе рассмотрены последовательности чисел, количества делителей которых образуют арифметическую или геометрическую прогрессию.

Через $M(k)$ обозначим максимально возможное количество последовательных натуральных чисел, имеющих ровно k делителей (существование верней границы для каждого конкретного k легко доказывается). Очевидно, что $M(k) = 1$ для любого нечётного k и $M(2) = 2$. В других случаях значение функции зависит от степени двойки в каноническом разложении k и от минимального натурального числа, которое не делит k. Обозначим их через s и d соответственно. Тогда справедливы оценки: $M(k) \leq 2^{2^s+1} - 1; M(k) \leq 2^d - 1$. В конкретных случаях удаётся уточнить оценки. Например: $M(2p) \leq 3$, где p – простое, $p \geq 5$; $M(k) \leq 5$ при $s = 1, d = 3$; $M(k) \leq 23$ при $s = 2, d = 5$.

Чтобы установить точное значение, необходимо построить соответствующую последовательность, что не всегда удаётся в силу ограниченных вычислительных возможностей компьютера. Ранее были известны точные значения $M(k)$ всего для семи четных k: 2, 4, 6, 8, 10, 14, 16. Нами получены точные значения $M(k)$ еще для 55 четных k.

Кроме того нами улучшены оценки $M(k)$ для некоторых значений, для которых $M(k)$ достаточно велико. Так, мы показали, что $10 \leq M(12) \leq 15$ (прежняя оценка $5 \leq M(12) \leq 23$)) и $14 \leq M(24) \leq 31$ (прежняя оценка $12 \leq M(24) \leq 31$).

Отметим, что при этом мы нашли 14 последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет ровно 24 натуральных делителя. До этого самая длинная известная цепочка из последовательных натуральных чисел, имеющих одинаковое количество делителей, насчитывала всего 12 чисел.

Пусть $A(m, q)$ – максимально возможное количество последовательных натуральных чисел, количества делителей которых образуют арифметическую прогрессию с первым членом m и разностью q. Аналогично вводится $B(m, q)$, где q – знаменатель геометрической прогрессии. Нами получен ряд оценок и точных значений $A(m, q)$ и $B(m, q)$ для конкретных значений m и q.

РЕГУЛЯРНОСТЬ ЦИКЛОВ ГРУПП ПОДСТАНОВОК

Хазалия Лиана Бадриевна (Минск, Гимназия №41 имени Серебряного В. Х., 11 класс)
Руководитель: Дубров Борис Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики БГУ

В конце XX – XXI века возрос интерес к применению понятий теории вероятности к теории конечных групп. Некоторые приложения описаны в статье *Probabilistic Group Theory* John D. Dixon. В данной работе к доказательству представлена гипотеза, относящаяся к возникшей таким образом статистической теории групп.

Пусть $G \subset S_n$. Тогда $\frac{|C(G)|}{|G|} \leq \frac{\varphi(n)}{n}$, где $C(G) = \{\sigma \in G \mid \sigma — \text{цикл длины } n\}$. Иными словами, $C(G)$ является множеством регулярных элементов группы G.

Таким образом, была поставлена задача исследования регулярности циклов в подгруппах группы подстановок. Подобные вопросы были поставлены Звонкиным А. К. В частности, упоминаются в статье *Primitive permutation groups containing a cycle* Gareth A. Jones.

В этой работе поставленная гипотеза доказывается отдельно для примитивных и импримитивных групп. Случай примитивных групп существенно опирается на классификацию примитивных групп, содержащих регулярные циклические подгруппы. В случае импримитивных групп задача сводится к исследованию сплетений циклических групп.

В статье *Constructing transitive permutation groups* A. Hulpke дал описание метода построения транзитивной группы данного порядка. Представленный им алгоритм также успешно использован для классификации групп степеней от 16 до 30 в системе компьютерной алгебры GAP, которая нами была использована для проверки гипотезы для всех групп подстановок степени ≤ 31.

Хотелось бы отдельно отметить, что постановка гипотезы может быть интерпретирована как вероятность того, что случайно выбранный элемент группы подстановок является большим циклом (порождает транзитивную группу). А также как вычисление циклового индекса. Более подробно с теорией этого направления можно ознакомиться в книге *Graphical enumeration* Frank Harary, Edgar M. Palmer. Кроме того, в работе использованы методы, относящиеся к теории детских рисунков (the theory of dessins d’enfants).

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ТРАНСПОРТА

Каримов Марат Галимович (Челябинская область, г.Челябинск, ГБУ ОШИ «ЧОЛИ», 11 класс)
Руководитель: Кудрявцев Константин Николаевич, доцент, кандидат физико-математических наук, Южно-Уральский Государственный Университет

Найти оптимальный выбор транспорта для конкретной задачи. (Оптимизация дорожного движения на улицах города).

Математический аппарат ученика 11 класса (нахождение производной, исследование функций на экстремумы и монотонность, поиск равновесий по Нэшу (как графическим, так и аналитическим путем)).

Для данной задачи мы нашли 3 равновесия по Нэшу, среди которых можно выделить лучшее, которое находится в области $0{,}2 < t \leq 0{,}9$, менее хорошее, которое принадлежит промежутку $0{,}1 \leq t \leq 0{,}2$, наихудшее, которое находится в области $0{,}9 < t \leq 1$. (см. Приложение).

Данная модель и найденные для нее оптимальные стратегии могут применяться (после уточнения конкретного вида функций выигрыша) как при планировании способа передвижения по городу, так и для прогнозирования пробок, и для оптимизации дорожного движения. Так, например, мэрия города меняя стоимость проезда и количество (и качество) общественного транспорта, может изменять вид функций $a(t)$ и $b(t)$ и тем самым изменять вид равновесных решений в смешанных стратегиях, а следовательно влиять уже на загруженность дорог. Такие (обратные) задачи называются «дизайном механизмов» и позволяют добиваться от игроков требуемого поведения.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА В ГЕНЕТИКЕ

Кикина Арина Дмитриевна, Кирьянова Алена Сергеевна (Новосибирская область, г. Новосибирск, Информационно-экономический лицей, 11 класс)
Руководитель: Прокопьева Татьяна Викторовна, Преподаватель НГУАДИ

Ознакомиться с основными правилами и определениями теории вероятностей и популяционной генетики. Применить правила теории вероятностей при решении генетических задач. Провести анализ решений генетических задач с применением правил теории вероятностей. Выявить эффективность данного подхода. Создать программу на языке Pascal для решения генетических задач с конкретными числовыми данными.

В работе будут применяться следующие методы: теоретический анализ, решение генетических задач, сравнительный анализ решений генетических задач.

Изучив работы ученых и решая различные генетические задачи, мы убедились, что теория вероятностей наиболее применима для исследований в области генетики. При рассмотрении генетических задач теория вероятностей позволяет свести их решение к более упрощенным способам решений. Использование данного метода является более эффективным по времени и расчетам и несет маленький процент ошибок.

В дальнейшем планируем решение другого типа генетических задач с помощью рассмотренной модели. Также усовершенствование существующей программы на языке Pascal для более углублённого изучения генетики и применений методов теории вероятностей в математической статистике для решения задач.

ИССЛЕДОВАНИЕ 8-ДУГ В КОНЕЧНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ ПОРЯДКА 11

Кокшаров Кирилл Борисович (Челябинская обл., Челябинск, МБОУ лицей №11, 10)
Руководитель: Васильков Вадим Иванович, к.ф.-м.н., доцент, доцент каф. математики ЧГПУ

Цель работы: исследовать 8-дуги в конечной проективной плоскости (КПП) порядка 11.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

1) познакомиться с элементами теории КПП, научиться строить КПП порядка 11 над конечным полем того же порядка; рассмотреть группу коллинеаций изучаемой плоскости и важнейшие коллинеации этой группы; разобраться в сведениях об опорных k-дугах указанной плоскости при k =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

2) исследовать 8-дуги в той же плоскости.

Объект исследования: конечная проективная плоскость порядка 11.

Предмет исследования: 8-дуги указанной плоскости.

Методы исследования:

– теоретический (освоение элементов теории КПП, конечных полей, метода поэтапных отождествлений для исследования k-дуг данной КПП);

– практический (построение КПП порядка 11 над конечным полем того же порядка, исследование, с точностью до изоморфизма, 8-дуг изучаемой плоскости.

Работа содержит две главы, заключение, список литературы, а также приложение. В первой главе обзорно излагаются необходимые теоретические сведения. Во второй главе приведено построение описания рассматриваемой плоскости над конечным полем порядка 11, а также проведено исследование 8-дуг в изучаемой КПП порядка 11.

В результате проведенного исследования доказана теорема: в КПП порядка 11 имеется точно 21 тип 8-дуг.

Для каждой типовой (опорной) 8-дуги найдена группа автоморфизмов и ее порядок.

Полученные результаты позволяют продолжить исследование 9-, 10-, 11-, 12-дуг указанной плоскости.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ КРУГА И ПРИМЕНЕНИЕ ЭТИХ МЕТОДОВ К ШАРУ

Кондрашина Анна Алексеевна(Москва, лицей 1502 при МЭИ, 10 класс)
Руководитель: Румянцева Маргарита Алексеевна, учитель математики, лицей 1502

Начиная работу над проектом, мы поставили задачу вывести формулу площади круга, зная формулу длины окружности того же радиуса и зная формулу площади треугольника, формулу объема шара, зная формулу площади поверхности сферы и формулу объема 3-симплекса (симплекс – геометрическая фигура, являющаяся n-мерным обобщением треугольника). Актуальность нашей работы состоит в обобщении методов получения общеизвестной формулы площади круга и применении этих методов для фигур, находящихся в измерениях больших размерностей.

Основными методами, использованными в работе, являются метод треугольника, метод разбиения геометрической фигуры на части.

В ходе работы мы изучили различные методы доказательства формулы площади круга, и эти методы были применены для доказательства формулы объема шара. В изученных нами работах известных авторов эти метод не применялись, для измерений размерности больше двух. Следовательно, мы обобщили эти методы для получения формул для многомерных фигур.

Форма всех крупных небесных тел близка к шарообразной. Шар – это фигура с наименьшей площадью поверхности, а значит – обладающая и наименьшей поверхностной энергией. Поскольку любая физическая система стремится уменьшить свою поверхностную энергию, именно эту форму принимает жидкость или газ в состоянии невесомости. Именно поэтому изучение свойств шара является важной темой. В своей работе мы изучили разные способы получения формул для площади круга и применили эти методы к шару. В дальнейшем эти же методы можно использовать для получения формул для n-мерных фигур .

МАТРИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОВОРОТОВ ГРАНЕЙ КУБИКА РУБИКА

Кононюк Владислава Владимировна (Мурманская область, Кольский район, н.п. Зверосовхоз, МОУ Зверосовхозская СОШ, 9 класс)
Руководители: Абашкина Татьяна Сергеевна, учитель, МОУ Зверосовхозская СОШ, Абашкин Алексей Николаевич, учитель МОУ Зверосовхозская СОШ

Не первый год я изучаю математические свойства кубика Рубика. Естественно, что при изучении на уроках геометрии темы «Векторы» я решила рассмотреть векторы, возникающие в модели кубика. Цель моего исследования – изучить повороты граней кубика как матричные преобразования векторов. Для достижения цели исследования я поставила следующие задачи:

1) ввести систему координат для кубика Рубика;
2) рассмотреть поворот грани как преобразование вектора;
3) определить матрицу поворота для каждого поворота грани.

Методы исследования: введение системы координат для кубика Рубика, изучение матриц поворота векторов, определяющих ходы на кубике Рубика.

В результате проведённого исследования были получены матрицы преобразования векторов при поворотах граней на 90^0:

Т = Ф₋ имеют матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, В = Н₋ имеют матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Н = В₋ имеют матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, П = Л₋ имеют матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Л = П₋ имеют матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Исследуя другие операции, получим аналогичные результаты, то есть при поворотах граней матрицы поворотов возводятся в соответствующую количеству поворотов степень.

Исследуя преобразования ходов с точки зрения матриц я увидела, что законы этих движений можно использовать при создании виртуальной модели кубика. В данный момент эта модель находится в стадии разработки.

О КОЛИЧЕСТВЕ ДИАГОНАЛЕЙ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Корнев Михаил Игоревич, Кравченко Иван Сергеевич (Волгоградская область, Волгоград, МОУ Лицей №5, 11 класс)

Руководитель: Лецко Владимир Александрович, к. п. н., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического анализа Волгоградского государственного социально-педагогического университета

В работе исследованвопрос о возможном количестве диагоналей выпуклых многогранников, у которых зафиксировано число вершин (граней, рёбер). В последнее время теория абстрактных многогранников (т. е. таких, в которых важны не метрические, а комбинаторные свойства) оформилась в отдельный раздел математики, в котором до сих пор не исследован естественный вопрос о количестве диагоналей многогранников при фиксированном количестве вершин (граней, рёбер). При доказательстве существования требуемых многогранников мы опирались на теоремы Штейница, Эберхарда и Грюнбаума-Моцкина. Под вектором граней многогранника M будем понимать упорядоченный набор чисел $\vec{g} = (g_3, g_4, \dots, g_s)$, где g_k - количество k-угольных граней M. Отметим, что вектор граней вполне определяет число вершин (v), граней (f) и ребер (e) многогранника M. А именно $f = \sum_{k=3}^{s} g_k, e = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{s} k g_k,\ v = e + 2 - f$. Для количества диагоналей многогранника M имеет место формула: $D(M) = \frac{v(v-1)}{2} - e - \sum_{k=3}^{s} \frac{k(k-3)g_k}{2}$ (1).

В процессе работы мы применяли систему компьютерной алгебры «Maple».

Формула (1) позволяет найти количество диагоналей многогранника M с вектором граней $\vec{g}$. Однако, отыскание необходимых и достаточных условий, при которых данный упорядоченный набор чисел будет вектором граней некоторого многогранника – нерешенная проблема. Тем не менее, нам удалось описать все возможные значения количества диагоналей многогранников, имеющих данное число вершин v. Множество возможных значений представляет собой объединение отрезков ряда целых неотрицательных чисел $\{(k-1)(v-k-4), \dots, (k-1)(v-(k-6)/2)\}$, где kизменятся от 1 до $\lfloor(\sqrt{8v-15}-5)/2\rfloor$ (если это число положительно), и отрезка $\{(k-1)(v-k-4), \dots, (v-3)(v-4)/2\}$, где $k = \left\lfloor\frac{\sqrt{8v-15}-3}{2}\right\rfloor$. Отметим, что длины всех отрезков, за исключением последнего – последовательные треугольные числа. Если у многогранника зафиксировано количество граней f, ситуация похожа на вышеописанную, но несколько сложнее (отметим, что принцип двойственности не помогает при решении нашей задачи). Нами описаны отрезки натурального ряда, в пределах которых могут располагаться возможные значения количества диагоналей. Но эти отрезки заполнены интересующими нас числами не сплошь. Возможные значения количества диагоналей с данным числом ребер e существенно зависят от принадлежностиeк тому или иному классу вычетов по модулю 6. Кроме того, достижимость найденных нами верхних границ количества диагоналей в ряде случаев связана с проблемой существования многоугольника с заданным вектором граней.

В работе полностью решен вопрос о возможном количестве диагоналей выпуклых многогранников, имеющих данное число вершин, и сделаны существенные продвижения в решении аналогичных задач для многогранников с фиксированным числом граней (ребер).

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СУЩЕСТВОВАНИЕ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Корнев Михаил Игоревич, Кравченко Иван Сергеевич (Волгоградская область, Волгоград, МОУ Лицей №5, 11 класс)

Руководитель: Лецко Владимир Александрович, к. п. н., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического анализа Волгоградского государственного социально-педагогического университета

В нашей работе предлагается общий подход к решению широкого класса задач на существование треугольников, обладающих определенной комбинацией свойств. Исследование треугольников является классической задачей геометрии ещё со времён античности, однако математики и в XXI веке выявляют всё новые свойства этой фигуры.

В процессе работы мы применяли систему компьютерной алгебры «Maple».

Используя данный подход, мы получили следующие результаты (всякий раз единственность понимается с точностью до подобия):

- Существует единственный треугольник, у которого радиус вписанной окружности и три радиуса вневписанных окружностей образуют арифметическую (геометрическую) прогрессию. В случае геометрической прогрессии этот треугольник прямоугольный.
- Существует единственный треугольник, у которого площадь, площади треугольников из медиан, биссектрис и высот образуют арифметическую (геометрическую) прогрессию.
- Если в пункте 2 заменить площадь на периметр, то подходящих треугольников не найдется. В то же время, существует единственный треугольник, у которого суммы сторон, медиан, биссектрис и высот образуют арифметическую (геометрическую) прогрессию. Дело в том, что ни рассматриваемые биссектрисы, ни высоты не могут образовать треугольники.
- Существует единственный треугольник, у которого одновременно сумма двух биссектрис равна третьей и сумма двух высот равна третьей.
- Существует единственный треугольник, у которого меньшая медиана, средняя биссектриса и большая высота равны между собой.
- Рассмотрим множество $M=\{m_a, m_b, m_c, h_a, h_b, h_c, b_a, b_b, b_c\}$ в предположении, что $a \le b \le c$. Мы выяснили, что мощность множества может равняться одному из следующих чисел: 1, 4, 7, 8, 9. Будем считать, что два треугольника принадлежат к одному классу, если соответствующие им множества равномощны и одинаково упорядочены по возрастанию. При таком подходе все треугольники разбиваются 56 классов. Из них ровно 18 классов соответствуют случаям, когда все 9 вышеупомянутых величин различны. 10 классов содержат, с точностью до подобия, всего по одному треугольнику.
- Случаям, когда треугольники из высот и биссектрис существуют, в рассматриваемой нами области соответствуют некоторые подобласти. При этом подобласть, для которой существуют треугольники из высот, стабильна относительно существования треугольника из высот треугольника из высот и т.д. Но, для любого неравностороннего треугольника найдется такое n, что треугольника из «n-ных биссектрис» не существует. Иногда это n может быть очень велико. Например, для равнобедренного треугольника с основанием 2 и высотой 1,72, n равно 50818.

Предлагаемый подход позволяет решать и другие подобные задачи. Важными отличительными свойствами предлагаемого подхода являются его универсальность и высокая наглядность получаемых результатов, а это составляет общую значимость данного проекта.

ОБОБЩЕНИЕ ПЕРЕСТАНОВОЧНОГО НЕРАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА МЮРХЕДА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Луговская Анастасия Михайловна (Беларусь, Гомельская обл., г. Речица, Речицкая районная гимназия, 10 класс)
Руководитель: Горский Сергей Михайлович, ассистент, УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»

1. В работе на основе перестановочного неравенства и неравенства Мюрхеда были сформулированы и доказаны обобщения для выпуклых (вогнутых) и логарифмически выпуклых (логарифмически вогнутых) на интервале функций. Полученные обобщения значительно упрощают доказательства большинства неравенств.

*Определение 1.*Функция f называется выпуклой на промежутке I, если её надграфик на этом промежутке является выпуклым множеством.

*Определение 2.*Функция f называется логарифмически выпуклой промежутке I, если она принимает только положительные значения и её логарифм ln f(x) является выпуклой на промежутке I функцией.

2. В ходе выполнения данной исследовательской работы мной были получены следующие неравенства:

- $f(a_1 + b_1) + f(a_2 + b_2) \geq f(a_2 + b_1) + f(a_1 + b_2)$,
- $f(a_1 + b_1)f(a_2 + b_2) \geq f(a_2 + b_1)f(a_1 + b_2)$,
- $f(a_1b_1) + f(a_2b_2) \geq f(a_2b_1) + f(a_1b_2)$,
- $f(a_1b_1)f(a_2b_2) \geq f(a_2b_1)f(a_1b_2)$,
- $\sum_{sym} f(x_1^{a_1}x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}) \geq \sum_{sym} f(x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n})$,

где f(x) – выпуклая (вогнутая) функция.

3. Полученные обобщения помогают решать олимпиадные задачи различного уровня, задачи оптимизации.

ЗАДАЧА ТОМСОНА ДЛЯ ТРЕХ, ЧЕТЫРЕХ И ШЕСТИ ЗАРЯДОВ

Масленникова Елизавета Алексеевна (Московская область, г. Сергиев Посад,
МБОУ «Физико-математический лицей», 10 класс)
Руководитель: Забавин Валерий Николаевич, доктор физико-математических наук

В началеXX века, конструируя модель атома, английский физик Джозеф Джон Томсон рассматривал задачу о равновесном расположении зарядов на сфере. После открытия атомного ядра эта задача была отложена, а в последнее время вновь привлекла к себе внимание математиков. В представленной работе поставлена задача доказать равновесность предполагаемых расположений трех, четырех и шести одинаковых зарядов.

В работе Андреева Н.Н. и Юдина В.А. «Экстремальные расположения точек на сфере»(Математическое просвещение (третья серия).Вып. 1 – М.: МЦНМО, 1997.) сообщается, что для трех и четырех зарядов доказательства выполнены с помощью неравенств между средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим, но самих доказательств не приводится. В этой же работе выполнены доказательства для шести и двенадцати зарядов с помощью методов, известных узкому кругу специалистов.В представленной работе используются только методы элементарной математики.

Доказана равновесность известных расположений на сфере трех (правильный треугольник, плоскость которого проходит через центр сферы), четырех (правильный тетраэдр) и шести (правильный октаэдр). Для шести зарядов доказана единственность расположения зарядов (для трех и четырех зарядов она не требует доказательств).

Возможный путь развития задачи: выяснить, допускают ли предложенные методы обобщение на случай произвольного числа зарядов.

НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА НЕРАВЕНСТВО О СРЕДНИХ

Московкин Владислав Валерьевич (г.Гомель, ГУО «Гомельская Ирининская гимназия», 10 Б класс)

Руководитель: Горский Сергей Михайлович, ассистент кафедры математического анализа УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины »

Целью этой работы является рассмотрение неравенств являющихся линейной комбинацией средних. Нахождение наименьших значений переменных для которых неравенства были бы равны для любых a и b.

В целом вся работа основана на теореме Коши и на основных неравенствах о средних.

Обозначения:

Обозначим через $A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, $G_n = \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}$, $Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$, $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$, $Qu_n = \sqrt[3]{\frac{a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3}{n}}$.

Теорема:$G_n \le \frac{n-1}{n}A_n + \frac{1}{n}H_n$.

Также были доказаны неравенства:

$\lambda A_2 + (1-\lambda)H_2 \ge G_2$	$\lambda \ge \frac{1}{2}$
$\lambda Q_2 + (1-\lambda)H_2 \ge G_2$	$\lambda \ge \frac{1}{3}$
$\lambda Qu_2 + (1-\lambda)H_2 \ge G_2$	$\lambda \ge 0.2555(*)$
$\lambda Q_2 + (1-\lambda)G_2 \ge A_2$	$\lambda \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\lambda Q_2 + (1-\lambda)H_2 \ge A_2$	$\lambda \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\lambda Qu_2 + (1-\lambda)G_2 \ge A_2$	$\lambda \ge \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$
$\lambda Qu_2 + (1-\lambda)H_2 \ge A_2$	$\lambda \ge \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$
$\lambda Qu_2 + (1-\lambda)A_2 \ge Q_2$	$\lambda \ge \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt[3]{2^2}}$

* корень уравнения $400x^7 - 1720x^6 + 3087x^5 - 2049x^4 + 243x^3 + 15x^2 + 7x - 1 = 0$, на интервале (0,2; 0,4).

О ФУНКТОРАХ И ПУЧКАХ НА АБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЯХ

Новиков Глеб Александрович (Санкт-Петербург, ГБОУ СОШ 564, 11М класс)
Руководитель: Соснило Владимир Александрович, студент 1 курса магистратуры СПбГУ МАТ-МЕХ, сотрудник Лаборатории им. П.Л.Чебышева.

Теория категорий — язык современной математики. Она изучает свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов. Теория категорий нашла широкое применение в информатике и логике. Большой интерес в теории категорий представляют свойства отображений между категориями (так называемыми *функторами*) и структур, связанных с этими отображениями. На абелевой категории можно определить производный функтор от точного слева (контрвариантного) функтора со значениями в абелевых группах. Также можно определить топологию Гротендика на этой категории, в которой покрытия — эпиморфизмы. Также для пучков на топологии Гротендика можно определить производный функтор функтора глобальных сечений на объекте X Γ(X,F). Задачей этой работы будет исследование пучков абелевых групп в топологии Гротендика, а также изучение определённого выше производного функтора.

Для того, чтобы в полной мере понять работу, читателю потребуется знание основных определений теории категорий и некоторые углублённые знания из области гомологической алгебры, а именно понятие гомологии, определение цепного комплекса, резольвенты, абелевой категории и другие. Основополагающими определениями являются понятия предпучка, пучка, топологии Гротендика, производного функтора и некоторые другие, с ними связанные.

В этой работе изучается структура пучков в топологии Гротендика на абелевой категории. Было доказано, что пучки абелевых групп в топологии Гротендика являются точные слева контрвариантные функторы. Также было доказано, что значения производного функтора Γ(X,F) совпадают со значениями производного функтора R^iF. Последнее интересно тем, что с его помощью можно определить производный функтор на категории, в которой нет или мало проективных объектов.

Полученные результаты интересны для современной теории категорий и гомологической алгебры тем, что они позволяют определить весьма требовательные (к свойствам изучаемых объектов) конструкции, подходя с другой стороны к поставленной задачи. Следующим шагом этой работы будет изучение конкретных примеров, построенных с использованием доказанных в работе теорем.

КОМБИНАТОРНОЕ ВЫРЕЗАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ 1×L ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ M N С ПОЛУЧЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО СВЯЗАННОГО ОСТАТКА

Палюхович Антон Адамович (Беларусь, г.Минск, Лицей при БГУ, 10 класс)
Руководитель: Задворный Борис Валентинович, кандидат физ.-мат. наук, доцент, заместитель декана ФПМИ по проф.ориентации и дополнительному образованию.

Данная задача является подмножеством задач на упаковку, покрытие и разрезание. И соответственно с помощью её можно решать такие практические проблемы, как рассмотрение каким образом можно, если можно, замостить дорогу одинаковой тротуарной плиткой, чтобы конечный остаток был данной формы и в данном месте. А также проблему экономии материала на производстве на процессе выпиливания из шаблона одинаковых деталей. А также предлагает возможные способы замощения кафеля дома, чтобы делать минимальное количества распилов.

Задача данной работы заключается в следующем:

Рассмотреть все возможные правильные остатки от прямоугольника m на n после замощения его прямоугольниками *1×l.*

*М*ы показали и доказали, что правильный остаток в данном случае будет иметь прямоугольную форму, а также показали какие и только какие прямоугольники мы можем получить, в месте с этим показав в каких и только в каких местах они могут образовываться.

Мы использовали раскраски различного вида, а также некоторые иные приёмы, описание которых занимает много места, они все описаны в работе.

В данной работе решена вся исходная постановка. Доказали, что правильный остаток в данном случае будет иметь прямоугольную форму, а также доказано какие и только какие прямоугольники мы можем получить, в месте с этим показав в каких и только в каких местах они могут образовываться.

У данной работы есть много направлений для будущего изучения, каких как:

- Рассмотреть вероятность появления правильного остатка данного размеров на данном месте.
- Обобщение данной задачи на n-мерном пространстве (в место прямоугольника m × n использовать n-мерный прямоугольный параллелепипед со сторонами , , ,... , и в место "вырезаемого" прямоугольника 1 × *l* n-мерный прямоугольный параллелепипед со сторонами 1, 1, ... , *l*)
- Рассмотрение в место "вырезаемого" прямоугольника 1 × l прямоугольник s × l , то есть добавить к переменным m, n и *l* ещё одну.