КОММУТАТОРНАЯ ДЛИНА ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ В ТЕРМИНАХ ГРУППОВОГО КОЛЬЦА

Вагнер Максим Вадимович, Соликов Павел Дмитриевич (Санкт-Петербург, ГБОУ СОШ №564, 11 класс)
Руководитель: Зайковский Анатолий Александрович, студент СПбГУ

Пусть G — группа и $[G,G]$ — её коммутант, то есть группа, порождённая коммутаторами $[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$. Тогда любой элемент из коммутанта представляется в виде произведения коммутаторов. Наименьшее число коммутаторов необходимое для представления элемента $g \in [G,G]$ называется коммутаторной длиной g и обозначается через $Cl(g)$.

Цель нашей работы заключается в создании аппарата для перенесения работы с обычной коммутаторной длиной из группы G в групповое кольцо $\mathbb{Z}G$. Мы даём эквивалентное определение коммутаторной длины для элемента из $[G,G]$, которое не использует понятие коммутатора в группе, но использует понятие кольцевого коммутатора в групповом кольце.

Сформулируем строго наш основной результат. Пусть G — произвольная группа. Для двух элементов x, y из группового кольца $\mathbb{Z}G$ обозначим через $[x,y]_{\mathsf{rng}}$ их кольцевой коммутатор

$$[x,y]_{\mathsf{rng}} = xy - yx.$$

Можно доказать, что для любого элемента $g \in [G,G]$ существуют такие $g_i, h_i, f_i \in G, 1 \le i \le n$ что

$$g - 1 = g_1[h_1, f_1]_{\mathsf{rng}} + \cdots + g_n[h_n, f_n]_{\mathsf{rng}}.$$

Наименьшее такое n назовём кольцевой коммутаторной длиной g и обозначим через $Cl_{\mathsf{rng}}(g)$. Цель нашей работы доказать, что для любого $g \in [G,G]$. Имеет место равенство

$$Cl(g) = Cl_{\mathsf{rng}}(g-1).$$

Таким образом, кольцевая коммутаторная длина совпадает с обычной, и это лишь другое определение известного объекта.

Доказанное нами эквивалентное определение полезно тем, что теперь "кирпичики"из которых всё "собирается"уже не умножаются в (некоммутативной) группе, а складываются в групповом кольце. Поэтому не нужно заботиться о том, в каком порядке мы их расставим. Мы надеемся, что преимущества этого определения дадут ряд продвижений в общей теории коммутаторной длины.

Для упрощения доказательства равенства $Cl(g) = Cl_{\mathsf{rng}}(g-1)$ мы разбили задачу на 4 действия. Из доказательства этих утверждений непосредственно вытекает основная теорема.

1° если $g \in [G,\ G]$, то $g - 1 \in [I,\ I]_{\mathsf{rng}}$;

2° если $Cl(g) = 1$, то $Cl_{\mathsf{rng}}(g-1) = 1$;

3° $Cl(g) \ge Cl_{\mathsf{rng}}(g-1)$;

4° $Cl(g) \le Cl_{\mathsf{rng}}(g-1)$.