



БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС

Санкт-Петербург, 30 января - 2 февраля 2017 года

Обобщенные тождества Якоби и Якобиевы элементы группового кольца симметрической группы

Новиков Савелий Александрович (Ленинградская обл., Санкт-Петербург, ГБОУ СОШ 564, 10М класс)

Научный руководитель: Иванов Сергей Олегович, кандидат физ.-матем. наук, сотрудник Лаборатории им. П.Л.Чебышева.

Алгебра Ли – объект из абстрактной алгебры, который естественно возникает в теории групп Ли, комбинаторной теории групп, квантовой физике и других областях алгебры, геометрии и физики. С любой группой Ли можно связать какую-то алгебру Ли, которая полностью отражает локальную структуру исходной группы. Алгебра Ли – это векторное пространство вместе с билинейной операцией $[-, -]$, которая называется скобкой и удовлетворяет соотношениям

$$1) [x, x] = 0$$

$$2) [x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0,$$

где по определению $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$. Второе тождество называется тождеством Якоби. Заметим, что сумма

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_2, x_3, x_4, x_1] + [x_3, x_4, x_1, x_2] + [x_4, x_1, x_2, x_3]$$

не обязательно равна нулю в произвольной алгебре Ли. Но есть более сложное тождество на четырёх буквах, которое выполняется в произвольной алгебре Ли:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_2, x_1, x_4, x_3] + [x_3, x_4, x_1, x_2] + [x_4, x_3, x_2, x_1] = 0.$$

Это говорит о том, что тождества от нескольких букв, которые обобщают тождества Якоби, устроены довольно сложно. В работе Ильи Алексева ``Высшие тождества Якоби" ([1])

автор занимался изучением так называемых Якобиевых множеств, то есть подмножеств в группе перестановок S_n , которые порождают тождества в алгебрах Ли подобные тождеству Якоби. Он исследовал их фундаментальные свойства и построил серию тождеств $T_{k, l, n}$ в алгебрах Ли, где $T_{1, 2, 3}$ - это обычное тождество Якоби. Но полного описания всех Якобиевых подмножеств он не нашел. Нашу работу можно считать продолжением работы Ильи Алексева. Мы задаёмся более общим вопросом, и, используя этот ответ, продолжаем исследование Якобиевых подмножеств. А именно, мы определяем понятие Якобиева элемента в групповом кольце симметрической группы и описываем это множество на языке линейных уравнений на коэффициенты при элементах симметрической группы. После чего, используя это описание, мы описываем все Якобиевы подмножества для $n=4$. Каждый элемент a группового кольца $Z[S_n]$ является линейной комбинацией перестановок с целыми коэффициентами.

В работе были использованы математические определения связанные с абстрактной алгеброй также были введены некоторые собственные обозначения.

Первый основной результат работы заключается в явном описании Якобиевых элементов группового кольца на языке линейных уравнений на коэффициенты $a(s)$. Второй основной результат заключается в полном описании Якобиевых подмножеств для $n=4$.

Эта работа может быть полезна в будущих исследованиях в некоторых областях математики и физики. Развитием проблемы может быть дальнейшее исследование Якобиевых элементов, использование этого языка для описания абсолютно всех Якобиевых подмножеств.