БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС
Санкт-Петербург, 30 января - 2 февраля 2017 года

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЛОЖЕНИИ ГЕРОНОВЫХ МНОЖЕСТВ В Z^2

Шведов Андрей Робертович (Беларусь, г. Минск, Гимназия №41, 11 класс)
Шешко Николай Андреевич (Беларусь, г. Минск, Гимназия №41, 11 класс)
Руководитель: Змейков Давид Юрьевич, Ph.D., преподаватель, БГУ

Множество, в котором все попарные расстояния целые, мы называем идеальным. Такие множества широко исследовались различными математиками. Теорема Эрдеша--Эннинга гласит, что не существует бесконечного неколлинеарного идеального множества. Поиск наибольшего идеального множества такого, что никакие три точки не лежат на одной прямой и никакие четыре на одной окружности, является открытой проблемой математики. На данный момент наибольшее известное такое множество имеет мощность 7 (см. например [4], стр. 287). В 1997 году в институте Обервольфах Данил Каток и Карлос Морейра попросили доказать следующее утверждение: любой треугольник с целыми сторонами и рациональной площадью имеет копию в Z^2.

Основными методами связаны с гауссовыми целыми числами, квадратичными вычетами и триангуляциями плоских множеств.

Мы приводим простое доказательство этого утверждения, попутно показывая, что у треугольников с заданными свойствами площадь обязана быть целой (то есть он геронов). Далее, мы показываем, что есть четырехугольники с целыми сторонами, площадью и одной из диагоналей, которые нельзя расположить на целочисленной решетке. В попытке обобщить задачу мы приходим к естественному обобщению героновых треугольников: идеальное множество точек из R^2 назовем героновым, если площадь его выпуклой оболочки целая. Для любого натурального n > 1 существует бесконечно много неконгруэнтных героновых множеств (как показано в секции 5). Основной результат нашей статьи заключен в следующей теореме. Теорема 4.2 : Любое героново множество точек плоскости имеет изометрическую копию в Z^2. В секциях 2--4 статьи мы последовательно доказываем эту теорему. В секции 6 мы приводим несколько интересных свойства героновых множеств, а в части 7 строим идеальные параллелограммы и вписанные героновы четырехугольники.

Мы также затрагиваем вопрос об аппроксимации произвольного многоугольника героновыми множествами, который непосредственно связан с гипотезой Безиковича (1959) о том, что любой многоугольник может быть сколь угодно точно приближен многоугольником с рациональными сторонами и диагоналями