Балтийский научно-инженерный конкурс

Санкт-Петербург

2 — 5 февраля 2015 года

Тезисы проектов

Тезисы работ по секции «Математика»

Обобщение задачи «о разборчивой невесте»
(Математика)

Борисова Полина,11 класс
Научный руководитель: кандидат ф.-м. наук Ногин Дмитрий Юрьевич.

Постановка классической задачи [1]**:**
- Есть множество из n принцев - претендентов на руку принцессы;
- Про любых двух когда-либо увиденных принцесса может сказать, кто из них лучше, при этом все претенденты образуют упорядоченное множество, т.е., если принц А лучше принца Б, а принц Б лучше принца С, то принц А лучше принца С;
- Принцы входят к принцессе по одному, причём их порядок определён случайным образом;
- С каждым претендентом можно поступить одним из двух способов: согласиться на его предложение руки и сердца (тогда игра заканчивается) или отказать ему (тогда он больше не вернётся, поэтому уже никогда нельзя будет принять его предложение).
- Цель принцессы - выбрать самого лучшего претендента.

В нашей работе мы изучали обобщение этой задачи, т.е. рассматривали случаи, когда принцесса выиграет, если выберет одного из m женихов, занимающих с первой по m позиции в списке качества. Для этой задачи мы находим вероятность победы принцессы и оптимальную стратегию. Также мы решаем задачу, когда среди тех m претендентов, что устраивают принцессу, существует градация, т.е., например, получив второго по качеству, она будет счастлива в три раза больше, чем получив десятого. В этой задаче нам уже потребуются не вероятности тех или иных событий, а мат. ожидание выигрыша, которое нами и рассчитывается. Также нами выводится оптимальная стратегия действий и находится ее зависимость от «коэффициентов счастья» (т.е. количества счастья принцессы при получении того или иного жениха).

Методы: вывод рекуррентных формул для расчета вероятности тех или иных событий, методы динамического программирования, графический метод.

Основные результаты: решена задача «о разборчивой невесте» в общем случае и две задачи, где среди претендентов на руку принцессы существует градация (также рассмотрен одна из подзадач, когда все «коэффициенты счастья» отличаются друг от друга в k раз). Найдена оптимальная стратегия выбора жениха во всех трех случаях, построены графики, наглядно демонстрирующие процессы, описанные в задачах.

Возможные пути развития задачи: более подробное рассмотрение того, как ведут себя графики функций при изменении «коэффициентов счастья» в градационной задаче, а также количества претендентов во всех трех задачах, вследствие чего сделать более точные выводы о зависимости оптимальной стратегии от разных параметров.

Список основной использованной литературы:
1. С. М. Гусейн-Заде, Разборчивая невеста, М.: МЦНМО, 2003
2. С. М. Гусейн-Заде, “Задача выбора и оптимальное правило остановки последовательности независимых испытаний”, ТВП, 11:3 (1966), 534–537

Обобщение неравенства Несбита
(Математика)

Соловей Александра Владимировна, 10 класс, Чижов Игорь Викторович, 11 класс (г.Гомель)
Научный руководитель: Горский Сергей Михайлович, ассистент кафедры математического анализа УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины».

Постановка задачи: В работе были доказаны следующие обобщения неравенства Несбита:

$$\frac{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z}{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z} + \frac{\alpha_1 y + \alpha_2 z + \alpha_3 x}{\beta_1 y + \beta_2 z + \beta_3 x} + \frac{\alpha_1 z + \alpha_2 x + \alpha_3 y}{\beta_1 z + \beta_2 x + \beta_3 y} \geq \frac{3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3};$$

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^r}{p - x_i^s}\right)^{\lambda} \geq n^{1-\lambda} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\lambda} \left(\frac{p}{n}\right)^{\lambda\left(\frac{r}{s}-1\right)}.$$

Основные результаты: Были получены доказательства для поставленных неравенств.
Возможные пути развития задачи: Работа над дальнейшим обобщением Неравенства Несбита.

Различные условия принадлежности центров вневписанных окружностей n-угольника одной окружности
(Математика)

Овчинникова Анастасия Сергеевна, Щербакова Анастасия Сергеевна 11 класс (г. Новосибирск)
Научный руководитель: Ковшова Юлия Николаевна, доцент кафедры геометрии и методики обучения математике ФГБОУ ВПО "НГПУ"

Постановка задачи: Информация о вневписанных окружностях треугольника достаточно подробно представлена в литературе в отличие от информации о вневписанных окружностях n-угольника, где n > 3.
В нашей предыдущей работе мы выяснили, что центры вневписанных окружностей четырехугольника лежат на одной окружности, получили условие принадлежности центров вневписанных окружностей n-угольника в виде формулы, связывающей углы, отсекаемые диагональю полученного многоугольника с углами исходного многоугольника.
Вопрос о существовании окружности, которой принадлежат центры вневписанных окружностей, нельзя было считать решенным полностью, так как условия связывали полученный и исходный многоугольник, а не только элементы исходной фигуры .Была поставлена задача выявить такие условия
Методы, использованные автором: аналитический, геометрический, графический.
Основные результаты:. В работе рассмотрены: вневписанные окружности треугольника и их свойства, сформулировано определение вневписанной окружности произвольного многоугольника, далее это определение сужено на частный случай, который рассматривается далее.
Сформулированы и решены следующие задачи:
1) задача о условиях принадлежности центров вневписанных окружностей одной окружности при n-угольнике.
2) выведены условия вписанности для многоугольника, образованного центрами вневписанных окружностей.
Заключение и возможные пути развития задачи: получены различные условия, прк которых центры вневписанных окружностей выпуклого n-угольника лежат на одной окружности. В дальнейшем исследование может быть продолжено с целью рассмотрения других случаев вневписанности (касание продолжений не соседних сторон); отыскание частных видов многоугольников, для которых выполняется найденное условие; рассмотрение вневписанных окружностей для невыпуклого многоугольника.
Список основной использованной литературы:
1. Овчинникова А.С., Щербакова А.С. О вневписанных окружностях выпуклого четырехугольника. – НГПУ, г. Новосибирск, 2014.-28 с.
2. Понарин Я.П. «Элементарная геометрия» В 2 тт.—М.: МЦНМО,2004.
3. Режим доступа URL: http://do.gendocs.ru
4. Режим доступа URL: http://www.profistart.ru

Новые свойства точки Микеля четырехугольника
(Математика)

Кадырбеков Акан Габитович 11 класс (г. Усть-Каменогорск)
Научный руководитель: Адилгазинова Алия Зайнуллиновна, учитель математики высшей категории, преподаватели математики в КГУ "Областная специализированная школа-лицей для детей, одаренных в области математики, физики, информатики"

Цель исследования: изучить свойства точки Микеля четырехугольника и найти новые. Вывести теоремы о точке Микеля.
Актуальность заключается в том, что точка Микеля четырехугольника тесно связана с параболой, вписанной в четырехугольник, прямой Гаусса и прямой Обера. Следовательно, расширение знаний в области точки Микеля четырехугольника позволит узнать много нового и в других сферах геометрии.
Результатом исследования является ряд теорем:

Теорема 1. Точка Микеля четырехугольника имеющего и вписанную, и описанную окружности является точкой пересечения прямых m и l, где прямая m соединяет точки пересечения продолжений противоположных сторон четырехугольника, а прямая l проходит через центры вписанной и описанной окружностей.

Теорема 2. У четырехугольников, имеющих общие и вписанную, и описанную окружности, точки Микеля совпадают.

Теорема 3. Около треугольника ΔABC описана окружность с центром в точке O. Отрезок OD - перпендикуляр на сторону BC, отрезок OE - перпендикуляр на сторону AC. При движении вершины C по описанной окружности точка Микеля четырехугольника $ODCE$ движется по улитке Паскаля, которая проходит через точки A, B, O, а также является конхоидой окружности, описанной около ΔKLO, где точки K и L – середины отрезков AO и BO соответственно.

В ходе дальнейших исследований, я заметил, что если применить инверсию относительно окружности O к чертежу *теоремы 3*, то получится новая конструкция, описываемая в *теореме 4.*

Теорема 4. Вокруг ΔABC описана окружность с центром в точке O. На окружности k, описанной около ΔACO, найдена точка, диаметрально противоположная точке O - точка E. На окружности w, описанной около ΔBCO, найдена точка, диаметрально противоположная точке O - точка D. $DO \cap k = G$, $EO \cap w = F$. Прямые EG и FD пересекаются в точке M. При движении точки C по окружности с центром в точке O точка M описывает гиперболу, для которой точка O служит одним из фокусов.

Теорема 5. В самопересекающемся вписанном четырехугольнике $ABCD$ сторона AD равна диаметру описанной окружности с центром в точке O, а сторона BC перпендикулярна AD. При движении вершины B по описанной окружности так, что сохраняется условие $BC \perp AD$, точка Микеля четырехугольника $ABCD$ описывает лемнискату Бернулли, фокусы которой F_1 и F_2 такие, что $F_1 \in [AO], F_2 \in [DO]$ *и* $\frac{|AO|}{|F_1O|} = \frac{|DO|}{|F_2O|} = \sqrt{2}$, а O - её узловая точка.

К чертежу из теоремы 5 также применим инверсию относительно окружности O и получим следующее.

Теорема 6. Дана окружность с центром O и диаметром AD. Пусть B и C – какие-либо точки на окружности, симметричные относительно AD. Окружность, описанная около ΔBOC, пересекает AD в точке M'. Окружность, описанная около $\Delta BAM'$, пересекает окружность, описанную около $\Delta CDM'$, в точке S'. ГМТ S' – это равнобокая гипербола, с центром O.

Результаты: выведены новые теоремы о точке Микеля четырехугольника, что доказывает её связь со многими замечательными алгебраическими кривыми. Изобретены новые способы построения последних.

Список основной использованной литературы:

1. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка// Издательство МЦНМО – 2007г.
2. Савелов А.А. Плоские кривые.// НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика".-2002г.- Москва

Математические методы и современные архитектурные формы
(Математика)

Федосенко Татьяна Алексеевна, МАОУ «Информационно-экономический лицей», 10 класс.
Научный руководитель: Прокопьева Татьяна Викторовна, аспирант НГТУ.

Постановка задачи: Раздел математики «Теория графов» дает большое разнообразие методов для решения архитектурных задач. Они позволяют корректировать функциональные связи внутри объектов, оптимизировать поиск проектного решения, производить композиционный анализ по различным аспектам и т.д. в соответствии с моделями, которые можно изложить на языке теории графов, то есть более абстрактно, на основе понятий, акцентирующих внимание на бинарных отношениях между частями, из которых компонуется целое. Определения и термины, использованные в работе: граф, гиперболический параболоид, ядро графа.
Методы, использованные автором:

- элементы теории графов;
- методы построения плоскостей второго порядка в трехмерном пространстве.

Основные результаты: В процессе исследования мы провели анализ архитектурных форм с использованием такого типа поверхности, как гиперболический параболоид. Можно сделать вывод, что такого рода поверхности довольно популярны в современной архитектуре. Для создания проекта таких форм используется различные методы геометрического построения этих поверхностей. С помощью элементов теории графов путем моделирования и оптимизации функциональных связей провели анализ плана квартиры методом сопоставления с ядром графа. Таким образом, функциональное разграничение при проектировании плана жилых квартир не всегда рационально. Проведение анализа указанным выше методом дает возможность сделать проект более рациональным и удобным.
Заключение и возможные пути развития задачи: Одним из методов, имеющих большой потенциал для применения в архитектурном проектировании, является метод анализа архитектурной композиции путем сопоставления с ядром графа, который предварительно создается по предполагаемым связям внутри объекта. В случае несовпадения графа с его ядром производится корректировка связей. Метод был разработан Н. М. Зубовым на кафедре ТСАП и ВМ Свердловского архитектурного института.
Математика предлагает архитектору ряд, если так можно назвать, общих правил организации частей в целое, которые помогают:

- расположить эти части в пространстве, так, что в них проявлялся порядок;
- установить определенное соотношение между размерами частей и задать для изменения размеров (уменьшения или увеличения) определенную единую закономерность, что обеспечивает восприятие целостности и представление о порядке;
- выделить определенное место в пространстве, где будет размещаться сооружение, описать его определенной математической формой, которая также позволит выделить его из других сооружений и внести в их состав, создав новую композицию, новый архитектурный ансамбль.

Список основной использованной литературы:
1. Михайленко В.С., Кащенко А.В. Природа. Геометрия. Архитектура. –2-е изд. перераб. и доп. Киев: Будивельник, 1988.
2. http://archvuz.ru/2010_22/42
3. http://www.dissercat.com/content/matematicheskie-metody-i-modelirovanie-v-arkhitekture
   Источник: http://uchim.org/algebra-i-geometrija/giperbolicheskij-paraboloid

Быстрый алгоритм вычисления коммутаторной длины в свободной группе
(Математика)

Данил Фиалковский, 11 класс, Лаборатория Непрерывного Математического Образования, г.Санкт-Петербург.
Научный руководитель: Иванов Сергей Олегович, Лаборатория им. П.Л.Чебышева СПбГУ, кандидат наук.

Пусть G – группа и [G,G] её коммутант. Общеизвестно, что каждый элемент коммутанта может быть представлен в виде произведения коммутаторов. Наименьшее число коммутаторов, необходимое, чтобы выразить элемент g из коммутанта [G,G], называется коммутаторной длиной этого элемента и обозначается через cl(g). Изучение коммутаторной длины элементов в различных группах проводится в различных областях математики. В частности, сведения о коммутаторной длине элементов алгебраических групп применяются в алгебраической K-теории. Исследования в этой области велись такими учёными как C. Edmunds, R. Golstein, E. Turner, M. Culler, L. Comerford, D. Calegari, В. Бардаковым и другими.

Общеизвестно, что любая группа может быть представлена как фактор группа свободной группы, а при гомоморфизме коммутаторная длина не увеличивается. Поэтому коммутаторная длина элементов свободной группы представляет особый интерес.

Мы предлагаем быстрый алгоритм для вычисления коммутаторной длины элемента из коммутанта свободной группы. Основу для этого алгоритма даёт доказанная нами теорема:

Теорема. Пусть F – свободная группа с алфавитом $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Слово w из коммутанта свободной группы [F,F] имеет коммутаторную длину l тогда и только тогда, когда его можно представить в виде произведения

$w= w_1a^{-1}w_2b^{-1}a\, w_3b\, w_4$,

без сокращений, где w_i – некоторые слова, a,b из $\{x_1,x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1},\ldots, x_n ,x_n^{-1}\}$ и коммутаторная длина слова $w_1w_3w_2w_4$ равна l-1.

В качестве следствия мы получаем простой алгоритм, который позволяет ответить, является ли слово в свободной группе коммутатором. Этот алгоритм гораздо быстрее, чем алгоритм, который даёт известная теорема Викса [1]. А именно, мы доказываем следующее:

Следствие. Пусть F – свободная группа с алфавитом $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Слово w из коммутанта свободной группы [F,F] является коммутатором тогда и только тогда, когда его можно представить в виде произведения

$w= w_1a^{-1}w_2b^{-1}aw_3bw_4$,

без сокращений, где w_i – некоторые слова, a,b из $\{x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1},\ldots, x_n, x_n^{-1}\}$ и

$w_1w_3w_2w_4=1$

Список основной использованной литературы:

1. M. J. Wicks, Commutators in free products, J. London Math. Soc. 37 (1962), 433-444.
2. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, 4-е изд., М. Наука, 1996.

Диофантовы уравнения
(Математика)

Глотов Артем Алексеевич (г. Солигорск)
Научный руководитель: Гоглева Ксения Георгиевна, учитель математики ГОУ « Гимназия №1 г. Солигорска».

Исходная **постановка задачи** следующая:1) Выяснить, конечно ли множество решений уравнений $3^x+4^y=5^z$, $3^x+7^y=4^z$ в натуральных числах x, y, z? Найти все тройки натуральных чисел (x, y, z), являющиеся решениями этих уравнений.
2) Пусть a, b, c – натуральные числа, большие 1. Выяснить, может ли уравнение $a^x+b^y=c^z$ иметь бесконечное число решений в натуральных числах x, y, z?
3) Выяснить, верно ли, что существует бесконечно много троек натуральных чисел a, b, c, для каждой из которых уравнение $a^x+b^y=c^z$ имеет не более одного решения в натуральных числах x, y, z?
4) Для каждой фиксированной тройки натуральных чисел a, b, c оценить число решений уравнения $a^x+b^y=c^z$ в натуральных числах x, y, z (по мере возможности провести исследование для некоторых, или для всех троек a, b, c).
В первой главе найдены решения в натуральных числах для уравнений $3^x+4^y=5^z$, $3^x+7^y=4^z$.
Во второй главе рассмотрены некоторые вопросы о количестве решений диофантовых уравнений ax+ by= cz, решены уравнения $3^x+4^y=(3p+2)^z$ и $(p^\alpha)^x+((kp-1)^{2\beta-1})^y=((lp\pm1)^{2\gamma})^z$.
Главными достижениями работы являются решение уравнений $3^x+4^y=(3p+2)^z$ и $(p^\alpha)^x+((kp-1)^{2\beta-1})^y=((lp\pm1)^{2\gamma})^z$. Оба решения основаны на использовании гипотезы Каталана, которая утверждает, что уравнение $x^a-y^b=1\ (x,y,a,b>1)$ имеет единственное решение в натуральных числах: $x=3; a=2; y=2; b=3$ (гипотеза была доказана в 2002г.)
Теорема 1. Уравнение $3^x+4^y=(3p+2)^z$ разрешимо только при $p=1$ и имеет в этом случае единственное решение x=2, y=2, z=2.
Теорема 2. Уравнение $(p^\alpha)^x+((kp-1)^{2\beta-1})^y=((lp\pm1)^{2\gamma})^z$, где p - некоторое простое число, не меньшее пяти, $\alpha,\beta,\gamma,k,l\in\mathbb{N}$, не разрешимо в натуральных числах.
Также найдены уравнения для p=3, разрешимые в натуральных числах:
$3^x+2^y=25^z\ (x=2,y=4,z=1)$, $9^x+2^y=25^z\ (x=1,y=4,z=1)$,
$3^x+11^y=14884^z\ (x=5,y=4,z=1)$, $243^x+11^y=14884^z\ (x=1,y=4,z=1)$
В ходе работы были получены следующие результаты.
Найдены решения уравнений $3^x+4^y=5^z$, $3^x+7^y=4^z$
Построен пример уравнения вида $a^x+b^y=c^z$, которое имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Описан один из классов троек чисел (a;b;c) , для которых уравнение $a^x+b^y=c^z$, не имеет решений в натуральных числах.
Проведено исследование, найдено количество решений (и сами решения) предложенного уравнения для троек вида a=3,b=4, c=3p+2, а также для уравнения $(p^\alpha)^x+((kp-1)^{2\beta-1})^y=((lp\pm1)^{2\gamma})^z$ в случае, если p>3.

Список основной использованной литературы:
1. http://math4school.ru/uravnenija_v_celih_chislah.html
2. http://mathworld.wolfram.com/CatalansConjecture.html

Полиномиальные матричные уравнения
(Математика)

Головко Анастасия Витальевна, ОШ №40, 11 класс.
Научный руководитель: Третьяков Дмитрий Вадимович, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и функционального анализа, Крымский федеральный университет им. В.И.Вернадского.

Как отметил С.И. Гельфанд [1], задача о вычисления корней полиномиальных матричных уравнений является классической , но этой задачей еще никто не занимался. Тем не менее полиномиальные матричные уравнения могут использоваться в различных областях физики и механики . Например, известно, что к полиномиальном матричном уравнению сводится задача об активном гашения вредных колебаний [2]. При такого рода деятельности полезные процессы должны поддерживаться или усиливаться , а вредные - гаситься к известной степени. Эти соображения используются при проектировании различных гасящих систем.

Цель работы:

1 **.** Исследовать свойства операций над матрицами, свойства матриц I-го ранга;

2 . Исследовать на разрешимость полиномиальные матричные уравнения второй степени с действительными коэффициентами и найти формулы для частных решений специального вида;

3 . Исследовать на разрешимость полиномиальные матричные уравнения третьей степени с действительными коэффициентами и найти формулы для частных решений специального вида;

4 . Исследовать на разрешимость полиномиальное матричное уравнение алгоритма управления гашения вредных процессов и найти частные решения этих уравнений специального вида.

Задача: изучить операции над матрицами и их свойства, изучить свойства матриц первого ранга, исследовать на разрешимость некоторые классы полиномиальных уравнений и найти частные решения этих уравнений специального вида, рассмотреть примеры.

Полученные результаты :

- При помощи специальной замены, использующей матрицы 1 ранга получены формулы для решения полиномиальных матричных уравнений с действительными коэффициентами второй и третьей степени специального вида.
- Проведено исследование полиномиального матричного уравнения с действительными коэффициентами,, которое возникает в теории гашения вредоносных процессов . Получены формулы для частных решений этого уравнения.

Заключение: полиномиальные матричные уравнения второй и третьей степени могут быть решены с помощью особых подстановок, использующих матрицы 1 - го ранга. С помощью этих матриц можно также получить решение специального вида уравнения, которое описывает алгоритм управления гашения вредоносных процессов. Полиномиальные матричные уравнения могут быть использованы в некоторых задачах математики, а также, при исследовании различных физических и механических проблем, связанных с гашением вредных колебаний.

Список основной использованной литературы:

1. «О числе корней матричного полиномиального уравнения» / / И.С. Гельфанд, Журнал «Глобус», вып. 1, 2004
2. «Активное гашения колебаний и матричные уравнения» / / В.А. Брусин, Журнал «Соросовский образовательный журнал» Т. 7, № 9, 2001
3. «Теория матриц» / / Ф.Р. Гантмахер., М.: «Наука» , 1989

О некоторых экстремальных прямых
(Математика)

Ипатова Виктория Сергеевна, ГБОУ лицей № 1303, 11 класс.
Научный руководитель: Привалов Александр Андреевич, ГБОУ лицей № 1303, Москва.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (n>2) – n точек плоскости, M – центр масс $\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MA_i}=\vec{0}\right)$, l – прямая и ρ(A,l) – расстояние от точки A до l. Тогда цели исследования содержатся в формулировках следующих теорем.

Теорема 1. Среди любых $A_1, A_2, \ldots, A_n$ существуют две точки, через которые проходит прямая l, сумма расстояний от которой до точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ минимальная, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(A_i,l)\le\sum_{i=1}^{n}\rho(A_i,l_1),\ \forall\ l_1,$$

Теорема 2. Среди любых $A_1, A_2, \ldots, A_n$ существуют три точки A, B, C такие, что наименее уклоняющаяся от $A_1, A_2, \ldots, A_n$ прямая l, т.е. такая, что

$$\max_{1\le i\le n}\rho(A_i,l)\le\max_{1\le i\le n}\rho(A_i,l_1),\ \forall\ l_1,$$

содержит среднею линию треугольника ABC.

Теорема 3. Для любых $A_1, A_2, \ldots, A_n$ существуют ровно одна (или бесконечно много) прямая l сумма квадратов расстояний от которой до точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ минимальная, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\rho^2(A_i,l)\le\sum_{i=1}^{n}\rho^2(A_i,l_1),\ \forall\ l_1, \qquad (1)$$

при этом $M\in l$.

В теореме 3 любая прямая содержащая M будет удовлетворять (1), например, если точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ являются вершинами правильного n-угольника.

Теорема 4. Для любых $A_1, A_2, \ldots, A_n$ существуют ровно две, не обязательно различных, точки P_1 и P_2 такие, что сумма квадратов расстояний от любой прямой, проходящей через P_1 или P_2, до точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будет постоянной величиной, т.е.

$$\forall l: P_j\in l\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\rho^2(A_i,l)=const,\ j=1,2$$

причем точки P_1 и P_2 симметричны относительно центра масс M.

Теорема 5. Если в теореме 4 для точек A_1, A_2, A_3 точки P_1 и P_2 совпадают (P_1=P_2), то треугольник $A_1A_2A_3$ правильный.

Теорему 5 нельзя обобщить на случай более трех точек (n>3).

Список основной использованной литературы:

1. Препарата Ф., Шеймос М., Вычислительная геометрия: Введение, – М.: Мир, 1989
2. Рудин У., Основы математического анализа, – М.: Мир, 1966

Некоторые малоизвестные факты о биссектрисе треугольника
(Математика)

Кондрашова Ксения, Лицей № 1553 им. В.И. Вернадского, 10 класс.
Научный руководитель: Ногин Дмитрий Юрьевич, кандидат физико-математических наук.

Задача: Проанализировать методы решения олимпиадных задач на тему «биссектриса в треугольнике».
Для достижения поставленной задачи были выделены следующие подзадачи:

- Из массива олимпиадных задач международных, национальных и региональных олимпиад отобрать задачи на тему «биссектриса в треугольнике».
- Решить каждую из выбранных задач.
- Выделить методы и приемы, применяемые для решения этих задач и систематизировать их.
- Проанализировать выделенные методы и приемы, собрать статистику по частоте их применения.

Основные результаты: Методы и приемы, применяемые при решении изучаемых задач, можно условно разбить на элементарные школьные, продвинутые школьные (т.е. как правило, известные лишь школьникам, интересующимся математикой) и дополнительные (требующие знаний помимо школьной программы).
Задач, в которых достаточно лишь элементарных школьных методов, среди выбранных олимпиадных задач почти нет (5%).
Задач, не требующих дополнительных знаний помимо школьной программы, достаточно много – около 2/3 общего числа.
В то же время, количество задач, при решении которых требуются дополнительные знания, тоже достаточно велико – около 1/3 общего числа. Как правило, именно эти задачи оказываются наиболее интересными.
В основном, при решении олимпиадных задач на выбранную тему используется не один метод или прием (такие задачи составляют 15%), а комбинация нескольких методов и приемов. В среднем в решении одной задачи использовалось около 3 методов.
Заключение: Результаты данной работы отчетливо показывают уровень знаний необходимый для успешного участия в различных олимпиадах. Материалы работы, выделенные методы и приемы могут применяться при подготовке к олимпиадам, а также, при углубленном изучении математики. Кроме того, факты о биссектрисе треугольника, собранные в этой работе, могут использоваться при изучении других интересных задач.
Возможные пути развития задачи: Увеличить массив рассматриваемых задач, проанализировать методы решения олимпиадных задач на другие темы.
Список основной использованной литературы:

1. Акопян А.В. Геометрия в картинках.- М., 2011
2. Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика?(Элементарный очерк идей и методов). - М.: МЦНМО, 2001
3. Г.С.М. Коксетер, С.Л. Грейтцер. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978

Аналог RSA-криптосистемы в квадратичных Евклидовых кольцах
(Математика)

Кондратенок Никита Васильевич, Гимназия 41 им. В.Х.Серебряного, 11 класс.
Научный руководитель: Васьковский Максим Михайлович, кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики БГУ.

В феврале 1978 года в журнале "Communications of the ACM" было впервые опубликовано полное описание RSA-криптосистемы [6]. С 1982 года алгоритм начал активно использоваться в зарождающейся сети Internet. В ноябре 1993 года опубликована статья, описывающая применение RSA для шифрования и создания электронной подписи.
В данной работе будет рассмотрен аналог RSA-криптосистемы, используемой как для шифрования, так и для электронной подписи. Отличие криптосистемы, описанной в данной работе, от классической в том, что числа p и q выбираются из произвольного квадратического Евклидового кольца, а не из целых чисел.
Также в работе рассмотрены ограничения на p и q, которые возникают из различных алгоритмов факторизации, таких как $(p-1)$- метод Полларда и метод Ферма [3]. А также из алгоритма дешифрования с помощью метода повторного шифрования [4].
Основной частью RSA-криптосистемы является вычисление публичного ключа, которое производится с помощью алгоритма Евклида. В статье Роллетсчека [7] доказано, что алгоритм Евклида с выбором минимального по норме остатка имеет наименьшую длину во всех квадратичных Евклидовых кольцах, кроме $Z[\sqrt{11}]$. В статье авторов [2] аналогичное утверждение рассмотрено в более общем классе колец. Так же авторами в статье [5] доказано, что алгоритм Евклида имеет логарифмическую сложность в квадратичных Евклидовых кольцах. Следовательно, поиск публичного ключа будет иметь такую же сложность, как и для целых чисел.
В работе получены **результаты**, которые позволили оценить возможность использования RSA-криптосистемы для квадратичных Евклидовых колец. Доказано, что в этом случае, даже с учетом ограничений, перспективы использования такой криптосистемы значительно шире, чем у существующей. Направлением дальнейших исследований представляется целесообразным назвать детальный сравнительный анализ криптостойкости существующих систем и предлагаемого аналога. Рассматривается возможность применения полученных результатов в областях, требующих использования цифровой подписи.

Список основной использованной литературы:

1. Базылев Д.Ф., Васьковский М.М., Матвеев Г.В., Размыслович Г.П. Сборник задач по прикладной алгебре. – Минск: БГУ, 2011.
2. Васьковский М.М., Кондратенок Н.В. Конечные обобщенные цепные дроби в Евклидовых кольцах // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – №3. – 2013. – С. 117-123.
3. Глухов М.М., Круглов И.А., Пичкур А.Б., Черемушкин А.В. Введение в теоретико-числовые методы криптографии. – СПб.: Лань, 2011.
4. Харин Ю.С., Агиевич С.В., Васильев Д.В., Матвеев Г.В. Криптология. – Минск: БГУ, 2013.
5. M.Vaskouski, N.Kondratyonok. Shortest division chains in unique factorization domains // Symbolic Computation.(appear in print)
6. R.L.Rivest, A.Shamir, L.Adleman. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems // Communications of the ACM. – New York, NY, USA: ACM, 1978, p. 120-126.
7. H.Rolletschek. Shortest division chains in imaginary quadratic number fields // Symbolic Computation, 1990, p. 321-354.

Реппауэры
(Математика)

Дзюбенко Василий Александрович (10 класс), Мухин Артем Михайлович (11 класс), МОУ гимназия №1.
Научный руководитель: Лецко Владимир Александрович, к. п. н., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического анализа Волгоградского государственного социально-педагогического университета.

Работа посвящена исследованию нетривиальных степеней натуральных чисел, запись которых в некоторой системе счисления состоит из группы цифр, повторенной несколько раз.
Пусть s, k, n, g – натуральные числа, причем s, k и g больше 1. Натуральное число R будем называть реппауэром, отвечающим набору (s, k, n, g), если R является точной s-й степенью и в системе счисления с основанием g записывается группой из n цифр, повторенной k раз.

Равенство $3636363636\ 4^2 = 1322314049\ 6132231404\ 96$ дает пример реппауэра, отвечающего набору (2, 2, 11, 10) (это наименьший реппауэр для g = 10). Другой пример реппауэра (отвечающего набору (4, 3, 1, 18)) дает равенство: $7^4 = \overline{777}_{18}$.
Очевидно, что при n = 1, k = 2 для любого s существует бесконечно много реппауэров для подходящих g. Например, при $g = a^s - 1$ число, записанное двумя единицами, будет точной s-й степенью.
Для изучения нетривиальных реппауэров нам потребуется представление произвольного натурального числа m в виде произведения степеней с показателями, не превосходящими фиксированного числа s. Пусть $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$ – каноническое разложение m. Тогда m может быть однозначно записано в виде $m = \prod_{i=1}^{s} m_i^i$, где $m_s = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\lfloor \alpha_i / s \rfloor}$ и $m_i = \prod p_j$, где $1 \le i \le s-1$, а произведение берется по тем j, для которых $\alpha_j \equiv i (\mathrm{mod}\, s)$.

Основная лемма: Пусть $\sum_{i=0}^{k-1} g^{ni} = \prod_{i=1}^{s} m_i^i$. Тогда число $R = \left(\prod_{i=1}^{s} m_i\right)^s$ является реппауэром, отвечающим набору (s, k, n, g) тогда и только тогда, когда $g^{n-1} \le \prod_{i=1}^{s-1} m_i^{s-i} < g^n$.
Следствие: Реппауэр, отвечающий набору (s, k, n, g), существует тогда и только тогда, когда найдется натуральное число h, такое что $g^{n-1} \le h^s \prod_{i=1}^{s-1} m_i^{s-i} < g^n$.
Нами получены следующие **результаты:**
При s = k = 2 для каждого основания g существует бесконечно много реппауэров.
При s = 2, k = 3, n = 1 имеется бесконечно много g, для которых существуют реппауэры.
При s = 3, k = n = 2 имеется бесконечно много g, для которых существуют реппауэры.
При s = k = 3, n = 1 имеется бесконечно много g, для которых существуют реппауэры.

Список основной использованной литературы:
1. Guy, Richard K. (2004). Unsolved Problems in Number Theory. Berlin: Springer-Verlag. ISBN 0-387-20860-7.
2. Robert; Stewart; Tenenbaum (2014). " "A refinement of the abc conjecture". preprint.

Об одной конике, связанной с к-трисами треугольника
(Математика)

Немычникова Валерия Павловна, Москва, 11 класс.
Научный руководитель: Привалов Александр Андреевич, ГБОУ Лицей №1303, Москва.

Кониками, или коническими сечениями называются кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Конические сечения известны, в первую очередь, своими оптическими свойствами.
В работе рассматриваются свойства некоторых коник.
Основным результатом работы является доказательство следующей новой теоремы: если провести прямые, которые разделяют углы треугольника на к равных частей, то основания крайних таких чевиан будут лежать на одной конике.
Эта задача косвенным образом возникает из рассмотрения трисектрис (то есть прямых, делящих угол треугольника на 3 равные части) и обобщается на любое натуральное количество прямых, делящих углы треугольника на равные части.
Подробно исследованы свойства полученной коники. В частности, рассмотрен предельный случай при бесконечном числе частей. Получено уравнение кривой.
Центр исследованной в работе предельной коники — новая замечательная точка в треугольнике, внесенная в Энциклопедию Треугольных Центров профессора Кимберлинга (http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETCPart4.html). (Замечательными точками треугольника называют такие точки, что их расположение зависит только от параметров треугольника (например, инцентр).

Список основной использованной литературы:

1. Paul Yiu, Introduction to the Geometry of the Triangle, Department of Mathematics Florida Atlantic University, 2001.
2. А. Г. Мякишев, Элементы геометрии треугольника, Москва, Издательство МЦНМО, 2002.
3. А. В. Акопян, А. А. Заславский, Геометрические свойства кривых второго порядка, Москва, Издательство МЦНМО, 2007.
4. Мякишев А., О некоторых "треугольных"кониках, Часть 1., Москва, Математической образование №4 (68), 2013.
5. В. Прасолов, Задачи по планиметрии, Москва, Издательство МЦНМО, 2007.
6. [Kimberling] Encyclopedia of Triangle Centers. http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

Гомотопические группы конечных пространств
(Математика)

Новиков Глеб Александрович, Санкт-Петербург, 10 класс.
Научный руководитель: Соснило Владимир Александрович, студент СПбГУ МАТ-МЕХ, сотрудник Лаборатории им. П.Л.Чебышева.

О работе: В гомотопической топологии одним из центральных понятий является понятие гомотопической группы пространства. Гомотопическая группа является важной характеристикой топологического пространства и является топологическим инвариантом. Несмотря на простоту этого понятия, вычисление конкретных гомотопических групп (даже для таких простых пространств, как n-мерной сферы) является трудной задачей, причём общие методы вычисления различных гомотопических групп были получены в середине XX века.
В данной работе предлагается способ вычисления гомотопических групп различных конечных клеточных комплексов. Этот метод сводит задачу вычисления гомотопических групп, а также классов отображений по модулю отношения гомотопности в целом к чисто комбинаторным задачам. Результат работы является аналогом известной теоремы Брауэра о симплициальной аппроксимации, но основную вычислительную роль здесь играют не сложные симплициальные множества, а более простые конечные топологические пространства.
Основные использованные определения: Для того чтобы в полной мере понять работу, читателю потребуется знание ряда определений, а именно понятие гомотопии, гомотопической эквивалентности отображений и пространств, определение клеточного (CW-комплекса) комплекса, его конечных моделей и другие. Основополагающими определениями являются понятия гомотопической группы и индуктивного предела направленной последовательности множеств.
Основные результаты: Результатом проделанной исследовательской работы был получен несложный способ вычисления множества отображений конечного клеточного комплекса N в конечный клеточный комплекс M по модулю гомотопии при помощи перехода к индуктивному пределу последовательности множеств отображений конечной модели клеточного комплекса N в конечное пространство, которое слабо гомотопически эквивалентно исходному клеточному комплексу M.
Список основной использованной литературы:
Автор выражает благодарность научному руководителю за проявленный интерес к работе и помощь в исследовании. Также, в процессе написания работы была использована следующая литература:

1. M.C. McCord. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. Duke Mathematical Journal 33 (1966)
2. А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. Москва «НАУКА». Главная редакция физико-математической литературы,1989

Функциональные уравнения над конечными множествами
(Математика)

Прохоров Николай Петрович, 11 класс
Научный руководитель: Жибрик Евгений Витальевич, ассистент кафедры высшей математики, БГУ.

Постановка задачи: Пусть n – натуральное число, большее 1. Через $\mathbb{Z}_n$ обозначим множество $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ классов вычетов по модулю n, где $\overline{a} = \{a + nt | t \in \mathbb{Z}\}$, $a \in \mathbb{Z}$. Иными словами, $\overline{a}$ – множество всех целых чисел, которые дают тот же остаток при делении на n, что и число a. Для элементов множества $\mathbb{Z}_n$ вводятся операции сложения и умножения следующим образом: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$. Через $G(\mathbb{Z}_n)$(приведённый класс вычетов) обозначим множество всех классов вычетов $\overline{a}$ по модулю n, таких, что числа a и n взаимно просты. Пусть A – непустое конечное множество. Через 2^A обозначим множество всех подмножеств, включая пустое подмножество, множества A. На множестве 2^A введем операции сложения и умножения: $X + Y = X\Delta Y$, $X \cdot Y = X \cap Y$, где $X\Delta Y = (X\backslash Y) \cup (Y\backslash X)$.
В данной задаче нами рассматривались различные функциональные уравнения над данными множествами, как новые, так и уже решённых для функций над другими множествами(например, уравнения Коши). Основной нашей целью было нахождение решений данных уравнений и количества решений, а также нетривиальных оценок на количество решений.
Методы: В работе нами использовалось большое количество различных результатов из таких разделов математики, как теория чисел (сравнения, их свойства, Китайская теорема об остатках, Теорема и функция Эйлера, первообразные корни, индексы и т.д.) и теория групп(свойства множества подмножеств и классов вычетов, как колец и групп), комбинаторика(числа Стирлинга и т.д.).
Результаты: Нами были решены следующие функциональные уравнения и найдено количество их решений:
1)$Af(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i f_i(\gamma_i x_i)$, $f, f_i: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m, \beta_i \in \mathbb{Z}_m, \gamma_i \in \mathbb{Z}_n, \alpha_i \in \mathbb{Z}_n, \exists \alpha_{t_1}, \alpha_{t_2} \in G(\mathbb{Z}_n)$;
2)$Af(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i) = \prod_{i=1}^{r} \beta_i f_i(\gamma_i x_i)$, $f, f_i: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m, A, \beta_i \in \mathbb{Z}_m, \gamma_i \in \mathbb{Z}_n, \alpha_i \in \mathbb{Z}_n, \exists \alpha_{t_1}, \alpha_{t_2} \in G(\mathbb{Z}_n)$;
3)$Af(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i) = Bg(\prod_{i=1}^{r} \beta_i x_i)$, $f, f_i: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m, A, B \in \mathbb{Z}_m, \gamma_i \in \mathbb{Z}_n, \alpha_i \in \mathbb{Z}_n, \exists \alpha_{t_1} \in G(\mathbb{Z}_n)$;
4)$f(x)f(y) = f(x) + f(y), f: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$;
5) $f(X + Y) = h(X) + g(Y), f, g, h: 2^A \to 2^B$;
6) $f(X + Y) = h(X) + g(Y) \wedge f(X \times Y) = h(X) \times g(Y), f, g, h: 2^A \to 2^B$;
Также нами были рассмотрены следующие уравнения:
1)$f(\sum_{i=1}^{r} x_i) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x_i) \wedge f(\prod_{i=1}^{r} x_i) = \prod_{i=1}^{r} f_i(x_i), f, f_i: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$;
2)$f(\prod_{i=1}^{r} x_i) = \prod_{i=1}^{r} f_i(x_i), f, f_i: G(\mathbb{Z}_n) \to G(\mathbb{Z}_m)$;
3) $f(\prod_{i=1}^{r} x_i) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x_i), f, f_i: G(\mathbb{Z}_n) \to \mathbb{Z}_m$.
Заключение: В работе был рассмотрен ряд функциональных уравнений для которых было получено большое количество нетривиальных результатов. Данные функциональные уравнения могут успешно использоваться в качестве опорных для решения и нахождения количества решений функциональных уравнений над классами вычетов, приведёнными классами вычетов, множествами подмножеств, а также различными конечными множествами изоморфными данным. Многие результаты могут также успешно использоваться в теории чисел, теории групп, а также в криптографии.
Список основной использованной литературы:
1. Бухштаб А.А. Теория чисел;

Исследование кривой, связанной с тремя фиксированными точками
(Математика)

Скокова Вера Андреевна, 11 класс.
Научный руководитель: Ковшова Юлия Николаевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии и методики обучения математике ФГБОУ ВПО "НГПУ".

Постановка задачи: Классический эллипс является хорошо исследованной кривой, в отличие от трёхфокусного. Им в середине XIX века интересовался шотландский ученый Джеймс Клерк Максвелл, однако он уделял большее внимание способам построения такого эллипса. В настоящее время с помощью трёхфокусного эллипса были решены некоторые задачи оптимизации. Однако не все свойства этой фигуры были исследованы, поэтому работа является актуальной. Была поставлена задача найти новые свойства ГМТ точек плоскости, для которых сумма расстояний до трех данных точек F_1, F_2, F_3 (фокусов), есть постоянная величина c, большая, чем $F_1F_2 + F_2F_3 + F_1F_3$.
Методы, использованные автором: аналитический, геометрический, графический, компьютерно-вычислительный. Для некоторых вычислений и построений графиков использовалась база знаний WolframAlpha: Computation Knowledge Engine (http://www.wolframalpha.com/).
Основные результаты: В ходе работы рассмотрены три случая расположения фокусов (точки лежат на одной прямой, точка F_2 является серединой отрезка F_1F_3; три точки лежат на одной прямой, расположение точки F_2 относительно точек F_1 и F_3 произвольно; три точки не лежат на одной прямой), для этих кривых выведены уравнения в декартовых и полярных (для двух случаев) координатах, область определения, допустимые значения параметров, оси симметрии (или доказано их отсутствие), точки пересечения с осями координат, исследована форма кривой в зависимости от расположения данных точек на плоскости и соотношения параметров, задающих эти расстояния и значение суммы, а также найдена связь кривой с центром тяжести треугольника. Таким образом, задача была выполнена (был найдены не описанные ранее свойства), однако исследование может быть продолжено.
Заключение и возможные пути развития задачи: полученные результаты существенно расширяют представление о трёхфокусных эллипсах. В дальнейшем исследование может быть продолжено с целью поиска свойств кривой, которые могли бы позволить найти её практическое применение, а также исследование кривой на предмет решения других задач оптимизации.
Список основной использованной литературы:

1. Утешев А. Ю. Задача Ферма-Торричелли и ее развитие http://pmpu.ru/vf4/algebra2/optimiz/distance/torri
2. J.C Maxwell Paper on the Description of Oval Curves, Feb 1846, from "The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell: 1846-1862
3. Скокова В. А., Исследование кривой, связанной с тремя фиксированными точками //Молодежь XXI века: образование, наука, инновации : материалы III Всероссийской студенческой научно-практической конференции с международным участием (г. Новосибирск, 19–21 ноября 2014 г.)

История Троицка в математике
(Математика)

Ткаченко Софья Сергеевна, 7 класс.
Научный руководитель: Мельникова Юлия Борисовна, учитель математики, МБОУ «Лицей №13».

Задачи: 1. Изучить литературу, посвященную городу Троицку. 2. Составить задачи, опираясь на исторические сведения из различных источников: очерков, газетных статей, мероприятий лицея 3. Составить задачник, проиллюстрировать его фотографиями Троицка. 4. Протестировать его на учащихся 6а класса МБОУ «Лицей №13». 5. Провести анкетирование, чтобы узнать мнение моих одноклассников о нашем задачнике.
В этом году городу Троицку 275 лет. Это очень большой праздник для всех живущих в этом городе. В связи с этим, мы решили подарить Троицку, всем детям и взрослым , задачник по математике. У нас возникла идея создать такой задачник, который сможет развить интерес к изучению математики у разных учащихся.
Цель: Создание задачника по математике, основанного на исторических данных, фактическом материале газетных статей, событиях в жизни учащихся лицея.
Гипотеза: Занимательный задачник способен привить интерес к изучению математики разных категорий учащихся.
Предмет изучения: Возможность взаимосвязи истории и математики на страницах задачника по математике.
Новизна и практическая значимость: Изучив много литературы, мы видим, что практически нет задачников, основанных на истории, современной жизни какого-либо города. Мы надеемся, что наш задачник будет интересен не только учащимся, но и учителям для организации внеклассной работы, при выполнении домашних и творческих заданий.
Мы изучили литературу, посвященную нашему городу, и пришли к выводу, что наиболее подходящими для составления задач являются книга Скобелкина Е.И. и Шамсутдинова И.М. «Возвращаясь к прошлому», материалы городской газеты «Вперед».
На первом этапе работы нами были выделены такие тематические разделы задачника как: историческая, домашняя математика и лицейская арифметика. Составлено порядка пятидесяти задач
Нами был скомпонован сборник, выполнены иллюстрации к нему, выполнен первый сигнальный экземпляр. Сборник был протестирован на учащихся 6 а класса МБОУ «Лицей №13»
Проведено анкетирование и обработаны его результаты. Анализируя ответы учащихся, мы пришли к выводу о том, что наша гипотеза о том, что занимательный задачник способен привить интерес к изучению математики разных категорий учащихся, подтвердилась.
Рекомендации: Мы рекомендуем наш задачник для внеклассной, проектной и исследовательской работы по математике как отличникам, так и не очень.
Работа была представлена в апреле 2014 года на Российской конференции «Шаг в будущее. Юниор», где заняла 1место и была удостоена медали за лучшую работу по математике.
Список основной использованной литературы:

1. Скобелкин Е.И. и Шамсутдинов И.М. «Возвращаясь к прошлому».
2. Троицкий городской округ: энциклопедия. Издательство «Каменный пояс», Челябинск.
3. Скобелкин Е.И. «По улицам и площадям Троицка».
4. Искандар Шамсутдинов «Троицк в очерках и фотографиях».
5. Сайт города Троицка http://mycitytroick.u-gu.ru/index.php/historycity.html
6. http://www.mycicerone.ru/wiki/Троицк_Челябинской_области. 7. Газета «Вперед»

Треугольники в графах
(Математика)

Воронько Антон, 11 класс
Научный руководитель: Бодягин Игорь Александрович - кандидат физико-математических наук, ФПМИ БГУ.

Постановка задачи: в данной задаче изучается количество треугольников ($t(G)$) в некотором графе G в зависимости от его различных параметров (количество вершин, набор степеней вершин графа). Кроме того, наряду с количеством треугольников в графе исследуется количество треугольников в его дополнении ($t(\overline{G})$). Также в работе исследуются значения $t(G)$ и $t(\overline{G})$ для графов, обладающих определёнными свойствами (в частности, локальными). Так, в работе представлено исследование данных величин для кубических рёберных графов (рёберным графом называется граф G, для которого существует некоторый граф H, такой, что две вершины в G смежны в том и только в том случае, если соответствующие им ребра в графе H имеют общую вершину).
Непосредственно эта задача впервые была представлена на XVI Республиканском турнире юных математиков (Беларусь). Большая часть вопросов, указанных выше, была предложена авторами задач турнира к исследованию. Отдельные вопросы были сформулированы автором работы в ходе исследования задачи, некоторых из них тесно связаны с **теорией Рамсея** и являются проблемами, широко исследуемыми в современной математике.
В ходе исследования были использованы методы, характерные для теории графов: комбинаторные методы, нетривиальные конструкции (в качестве примеров графов, для которых достигаются некоторые оценки) и др.
Результаты, заключение и возможные пути исследования задачи:
Были изучены некоторые классы графов, для них было найдено значение параметра $t(G)$.
Была найдена формула для подсчёта значения $t(G) + t(\overline{G})$, а также достижимые оценки снизу для данного параметра. Задача была рассмотрена для случая k цветов, где были получены нетривиальные результаты (в частности, реккурентная оценка минимального количества одноцветных треугольников в раскраске рёбер полного графа).
Наиболее полно в работе представлено исследование кубических рёберных графов, для которых было найдено точное значение параметров $t(G)$ и $t(\overline{G})$, а также было доказаны некоторые их локальные свойства. Кроме того, были доказаны некоторые необходимые условия существования графов, удовлетворяющих некоторым локальным свойства.
Таким образом, большая часть задачи, сформулированной изначально, была решена.
Исследование кубических рёберных графов, а именно – полученные формулы для вычисления изучаемых параметров, на взгляд автора, являются значимым результатом в исследуемой области. Содержательной также представляется связь исследования с теорией Рамсея (в частности, в том, что касается раскрасок полного графа в k цветов).
Последний вопрос также представляет интерес в части дальнейших исследований – полученные результаты могут быть улучшены и расширены, будучи тесно связаны с открытыми проблемами теории Рамсея (включая оценки чисел Рамсея).
Кроме того, интерес представляет изучение параметров $t(G)$ и $t(\overline{G})$ для графов обладающих локальными свойствами, отличными от свойств, уже изученных в работе.

Список основной использованной литературы:

1. Hugo S. Sun, M. E. Cohen: "An easy proof of the Greenwood–Gleason evaluation of the Ramsey number R(3,3,3)"// The Fibonacci Quarterly. 1984. B. 3. T. 22. C. 235–238.

Делимость подмножеств
(Математика)

Задорожнюк Анна Олеговна,10 класс (г.Гомель)
Научный руководитель: старший преподаватель, Симоненко Дмитрий Николаевич, БелГУТ

В работе рассматривается решение задачи, предложенной на XVI Республиканском турнире юных математиков в Республике Беларусь.
Исследуется функция M, которая паре натуральных чисел (k, l) ставит в соответствие такое минимальное натуральное число m, что в любом m-элементном множестве целых чисел всегда найдется k различных чисел, сумма которых будет делиться на l. Если же такого минимального m не существует, то M(k, l)=0.
Изучаются различные свойства этой функции. Проводится оценивание значений функции для некоторых пар (k, l). Как результат исследования, найдено точное значение M(k, l) для всех натуральных значений k и l.
В качестве обобщения рассматриваются другие функции, задание которых аналогично заданию M(k, l). В частности вместо суммы рассматриваются различные линейные комбинации этих чисел.

Список основной использованной литературы:

1. http://www.uni.bsu.by/arrangements/turnir/rtum16/zadan16.pdf - Задания для XVI Республиканского турнира юных математиков.

О числе слов в некотором языке
(Математика)

Зиновьевой Марии Сергеевны, 10 класс. (г.Гомель)
Научный руководитель: Симоненко Дмитрий Николаевич, БелГУТ, старший преподаватель.

Идея восходит корнями к задаче «Слова», предложенной сначала на IV Гомельском областном турнире Юных математиков, а затем в доработанном виде появившейся на XVI Республиканском турнире юных математиков в Республике Беларусь.

Алфавит некоторого языка состоит из двух букв: a и b. Два слова называются одинаковыми, если из одного слова можно получить второе слово, используя правила:

а) В любое место слова можно вставить последовательность aaaa или последовательность bb. Аналогично из любого слова можно удалить последовательности aaaa или bb.

б) Последовательность bab можно заменить на последовательность aaa и наоборот.

Пустое слово, которое будем обозначать ∅, также присутствует в языке. В данном случае по определению оно равно aaaa, а также bb. Первое правило кратко будем записывать как $a^4 = b^2 = \varnothing$, а второе — как $bab = a^3$.

В работе исследуются вопросы, связанные с равенством и неравенством слов, находится количество различных слов в языке.

Как развитие идеи задачи, рассматриваются более общие правила, изучается количество различных слов в этом, более общем, случае. Рассматриваются случаи большего количества слов в языке.

Список основной использованной литературы:

1. http://www.uni.bsu.by/arrangements/turnir/rtum16/zadan16.pdf - Задания для XVI Республиканского турнира юных математиков

О равномерных бесповторных морфизмах
(Математика)

Борис Золотов, Санкт-Петербург, 11 класс.
Научный руководитель — Кублановский Станислав Исаакович, доктор физико-математических наук, Директор ООО «Северный Очаг».

Введение. Постановка задачи: В начале XX века математиком Акселем Туэ впервые была поднята проблема построения бесконечных бесповторных слов. Было показано существование таких слов и приведены соответствующие примеры.
Решением этого же вопроса занимался английский математик Джон Лич. Им был найден пример бесконечного бесквадратного слова, построенный при помощи равномерного морфизма ранга 13.
В 1982 году была опубликована статья математика Макса Кречмора, в которой был приведён алгоритмически проверяемый критерий бесквадратности морфизма.
В настоящей работе получены новые результаты, позволяющие оптимизировать результаты Туэ и Лича и построить новые серии бесконечных бесповторных слов.
Методы, использованные автором: Была введена дополнительная структура на словах, порождённых морфизмами: определены понятия канонического фрагмента, операции прибавления и вычитания единицы на трёхсимвольном алфавите; использовано понятие монотонности. Также использовались общие методы комбинаторики на словах и критерии бесповторности морфизмов — в частности, критерий бесквадратности Кречмора [4].
Итоги работы: В работе произведена оптимизация результатов Лича — описаны все бесквадратные морфизмы наименьшего ранга над трёхсимвольным алфавитом. Независимо от работы [8] установлено, что этот наименьший ранг равен 11.
Также получены ответы на естественные вопросы: предложены новые серии бесповторных последовательностей и морфизмов, их порождающих. В ряде случаев приведены оптимальные — неулучшаемые — оценки рангов бесповторных морфизмов.
Один из основных результатов: В работе также были доказаны некоторые новые качественные теоремы о связи свойств бесповторных морфизмов. В частности,
Теорема о достаточном свойстве для слабой бесквадратности: Любой циклический бесквадратный морфизм является слабо бесквадратным.
Следствие: Морфизм Лича является слабо бесквадратным.
Заключение. Возможные пути развития: Теория бесповторных слов нашла своё применение в различных областях математики и других науках. Многие важные проблемы были решены с помощью методов комбинаторики на словах, в частности Новиковым и Адяном в середине XX века было получено отрицательное решение проблемы Бернсайда для многообразий групп. **По результатам работы** осталась открытой проблема существования равномерных слабо бесквадратных морфизмов Туэ над трёхсимвольным алфавитом рангом между 5 и 13.
Список основной использованной литературы:

1. Axel Thue, Uber unendliche Zeichenreihen; Norske Vid. Selsk Skr. I Mat.-Nat. Kl.; Christiania; 1906.
2. Axel Thue, Uber die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen; Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl.; Christiania; 1912.
3. John Leech, A problem on strings of beads; Math. Gazette 41; 1957.
4. Max Crochemore, Sharp characterizations of squarefree morphisms; Theor. Comput. Sci.; 18(1982).
5. Jean Berstel, Some recent results on squarefree words; Lecture Notes in Computer Science; 166(1984).

Модель ценообразования в городе Хотеллинга при неопределенности
(Математика)

Воеводов Владимир, 11 класс (г. Челябинск)
Научный руководитель: Кудрявцев Константин Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа ЮУрГУ

В работе построена и исследована модель ценообразования в дуополии при неопределенности, учитывающая пространственное расположение продавцов. Две фирмы реализующие одинаковый товар, расположены в городе Хотеллинга на плоскости, представляющим собой единичный квадрат с манхэттенской метрикой.

1. Теория игр — это раздел математики, изучающий поведение игроков в условиях конфликта и принятие ими оптимальных стратегий.
2. Линейный город Хотеллинга - модель ценообразования в дуополии, учитывающая пространственное расположение фирм.
3. Равновесием по Нэшу в нашей работе называется ситуация (набор стратегий) $\left(x^*, y^*\right)$, для которого выполняются условия
$$f_1\left(x, y^*\right) \le f_1\left(x^*, y^*\right),$$
$$f_2\left(x^*, y\right) \le f_2\left(x^*, y^*\right)$$
для всех произвольных стратегий игроков $x \in \mathrm{X}$, $y \in \mathrm{Y}$. Эти неравенства означают, что при отклонении одного из игроков от равновесия его выигрыш может только уменьшиться.
4. Игры при неопределенности – новое направление, позволяющее преодолеть несовершенства классической теории игр.
5. Так же в нашей работе используется понятие сильно гарантированного равновесия.

Результаты: в исследуемой работе было просчитано сильно гарантированное равновесие для игры при неопределенности. Сильно гарантированным равновесием в игре является тройка $\left(c^e, f_1^e, f_2^e\right)$, где сильно гарантирующая ситуация:

$c^e = \left(c_1^e, c_2^e\right)$, $c_1^e = \frac{11}{12}$, $c_2^e = \frac{5}{6}$, (Здесь с – цена, устанавливаемая каждым игроком)

а сильные гарантии $f_1^e = \dfrac{121}{288}$, $f_2^e = \dfrac{25}{72}$.

Для чего нужны подобные изыскания – оттачивания инструмента науки.

Выбор оптимальных стратегий в игре «Right&Up»
(Математика)

Каримов Марат Галимович, 10 класс (г. Челябинск)
Научный руководитель: Кудрявцев Константин Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа ЮУрГУ

Найти оптимальную стратегию в игре «Right&Up». Создать программу, которая использует эту стратегию, будет играть за одного из игроков.

Основа для создания систем искусственного интеллекта (М.Ботвинник возглавлял команду разработчиков, Б. Штильман создал основы «лингвистической геометрии». На основе этой «игрушки» создаются алгоритмы управления боем. Примером может служить война США в Ираке, когда действиями солдат управлял компьютер).

Теория игр — это раздел математики, изучающий поведение игроков в условиях конфликта и принятие ими оптимальных стратегий.

В данной работе был использован метод выигрышных позиций.В книге [5], был рассмотрен, построенный на обратной индукции, метод выигрышных позиций, позволяющий находить оптимальные стратегии.

Нами была разработана программа-игра «Right&Up». Компьютер-игрок при заданных параметрах вычисляет оптимальную стратегию и ходит в соответствии с ней. Однако, если компьютер изначально стоит на проигрышной позиции, то он ходит и случайно и выиграет лишь в том случае, если игрок отклониться от оптимальной стратегии.

Список основной использованной литературы:

1. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М., Наука, 1970.
2. Nash J..Non-Cooperative Games. // Annals of Mathematics, Vol. 54, No. 2, pp. 286-295.
3. Захаров А.В., Теория игр в общественных науках. М.: НИУ-ВШЭ, 2011.
4. Schaeffer J., Burch N., Bjornsson Y., Kishimoto A., Muller M., Lake R., Lu P., and Sutphen S. 2007. Checkers Is Solved. Science. 317 (5844)
5. ГенкинС.А., ИтенбергИ.В., ФоминД.В. Ленинградскиематематическиекружки. Киров: АСА, 1994. - 272 с.

Линейная алгебра матриц Адамара
(Математика)

Алексеев Илья Сергеевич 10 класс, Голыгин Илья Андреевич 9 класс (г. Санкт-Петербург)
Научный руководитель: Иванов Сергей Олегович (Кандидат наук)

Матрица Адамара H – это квадратная матрица $n \times n$, составленная из чисел ± 1, столбцы которой ортогональны так, что справедливо соотношение $H \cdot H^T = n \cdot E_n$. С одной стороны теорию матриц Адамара можно отнести к прикладной математике (Коды Рида-Маллера, функции Уолша). В частности, они использовались 1971 году при полёте на Марс в программе “Маринер Марс 71”, и используются в некоторых мобильных телефонах (таких стандартах сотовой связи, как IS-95, CDMA2000 или UMTS). С другой стороны, чисто математический вопрос о том, при каких n существует матрица Адамара размера $n \times n$, остаётся открытым.

В нашей работе некоторые классы матриц Адамара изучаются с точки зрения линейной алгебры. Если матрицу Адамара размера $n \times n$ умножить на $\sqrt{n}/n$, то получится ортогональная матрица. Назовём такую матрицу нормированной матрицей Адамара. Для ортогональных операторов есть нормальная форма. Она позволяет записать ортогональный оператор в виде прямой суммы операторов поворота и операторов симметрии. Мы задались вопросом о том, каким образом матрицы Адамара представляются в таком виде. Самый известный тип матриц Адамара – это матрицы Сильвестра. Мы доказываем, что матрицы Сильвестра задают оператор симметрии относительного некоторого явно заданного подпространства. Кроме того, были изучены некоторые матрицы Пэли.

Список основной использованной литературы:

1. K.J. Horadam, Hadamard matrices and their applications (Princeton University Press 2007).
2. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 5 изд., М.: Добросвет, МЦНМО, 1998.

Исследование классов эквивалентных слов в формальных языках, на которые их разбивают некоторые множества тождественных преобразований

(Математика)

Хазалия Лиана Бадриевна 10 класс (г. Минск)
Научный руководитель: Безруков Максим Львович, студент 2 курса, ФПМИ, БГУ

Постановка задачи: Пусть дан некоторый язык, а также некоторое множество преобразований данного языка в виде замен некоторой последовательности букв в слове на другую последовательность (одна из них может быть пустой), при этом при применении любого преобразования к любому слову мы получим также слово из данного языка. Не сложно заметить, что такое множество преобразований разобьет множество слов данного языка на классы эквивалентных слов. Кроме того, если рассмотреть некоторые два множества преобразований и из преобразований первого множества будет следовать возможность всех преобразований второго множества, а из преобразований второго множества будут следовать преобразования первого множества, то, чевидно, что эти два множества преобразований разобьют язык на одинаковые классы эквивалентности (такие два множества в дальнейшем будем называть тождественными). Таким образом возникают следующие вопросы: каково количество полученных классов в языке; возможно ли привести критерий, определяющий какому классу соответствует данное слово, и если возможно, то найти этот критерий; найти все возможные тождественные множества преобразований для данного множества преобразований.
Так же интересен вопрос о написании и исследовании грамматики языка, словами которого является множество слов данного языка такое, что в этом множестве ровно одно слово из каждого класса эквивалентных слов (при некотором конкретном множестве преобразований).
Результаты работы:Для языка состоящего из последовательностей букв a и b с преобразованиями an = bm = ε и aba = b, где m,n∈ N, приведен алгоритм, сводящий слово к равному вида aa…abb..b, который далее используется для доказательств, теоремы для нахождения эквивалентных слов, следствия (критерии равенства слов для языка с сокращениями и тождественных ему), построены автоматные и обобщенные автоматные грамматики для множества слов данного языка содержащего ровно по одному слову из каждого класса эквивалентности.
Основные используемые **методы**: Для языков с множеством слов равным всевозможным последовательностям из букв a и b – алгоритм сведения любого слова к эквивалентному ему слову вида aa…ab…b и инвариантность количества букв b по модулю m и количества букв a по модулю l, где l зависит от четностей или нечетностей n и m.
Дальнейшие направления исследования
1. Рассмотреть иные классы тождественных множеств сокращений.
2. Для произвольного множества сокращений над языком L, множество слов которого равно V*, где V алфавит данного языка, построить грамматику выводящую словарь языка, словами которого является множество слов данного языка такое, что в этом множестве ровно одно слово из каждого класса эквивалентных слов
Список основной использованной литературы:

1. Мартыненко Б. К. Языки и трансляции: учебное пособие – Изд. 2-е, испр. и доп. – СПб.:Издательство С.-Петерб. университета, 2008. 257 с.

Применение графического метода и симплекс-метода для решения задач линейного программирования
(Математика)

Кикина Арина Дмитриевна, Пушина Татьяна Андреевна 10 класс (г. Новосибирск)
Научный руководитель: Прокопьева Татьяна Викторовна, аспирант НГТУ

Постановка задачи:Исследовать применение графического метода и симплекс-метода для решения задач линейного программирования.Дать определения и понятия симплекс-метода. Решить задачу по экономике симплекс-методом с целью выбора правильной альтернативы финансовых вложений и определения экономического эффекта от вложений средств фирмы.
Методы, использованные автором: симплекс-метод линейного программирования
Основные результаты: В результате проведенного исследования мы дали определение и понятие симплекс-метода, решили задачу по экономике симплекс-методом с целью выбора правильной альтернативы финансовых вложений и определения экономического эффекта от вложений средств фирмы.
Заключение и возможные пути развития задачи: Симплекс-метод можно использоватьв таких областях наук, как: экономика, генетика, физика и т.д. В дальнейшем планируется проанализировать рациональность применения графического метода и симплекс-метода для решения различных задач, а также использовать различные языки программирования для решения задачсимплекс-метода
Список основной использованной литературы.
1. http://www.mathelp.spb.ru/applet/SimplexTool.htm
2. http://referatwork.ru/refs/source/ref-11842.
3. http://fb.ru/article/72969/simpleksnyiy-metod-i-ego-primenenie
4. http://matmetod-popova.narod.ru/theme24.htm
5. http://5ballov.qip.ru/vkontakte/preview/81650
6. http://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=560463
7. http://simplex-metod.narod.ru/simplex/primen/model_lp.html
8. http://xreferat.ru/54/2195-1-postroenie-ekonomicheskoiy-modeli-s-ispol-zovaniem-simpleks-metoda.html
9. https://ru.wikipedia.org/wiki/
10. http://www.studfiles.ru/dir/cat29/subj82/file14096/view152310/page4.html

Теорема о трехгранном угле и её применение в решении задач повышенной сложности
(Математика)

Подседов Илья Александрович 11 класс (г.Челябинск)
Научный руководитель: Асаинова Альфия Сибагатовна (учитель высшей квалификации)

В программу по математике средней школы входят темы двугранный угол и линейный угол двугранного угла. Тот факт, что существует трехгранный угол, в школьной программе не рассматривается. Однако, на мой взгляд, возможно, это упростит решение стереометрических задач на нахождение угла между плоскостями или гранями некоторой пространственной фигуры, что входит контрольно-измерительные материалы на экзамене в 11 классе по математике.
Таким образом, цель работы состоит в том, чтобы найти наиболее простой способ решения задач на нахождение угла между гранями стереометрической фигуры.
Гипотеза: теорема косинусов позволяет значительно упростить решение задач на нахождение угла между гранями стереометрической фигуры.
Для достижения цели, были поставлены следующие **задачи**:

1.Изучить и проанализировать имеющуюся литературу по данному вопросу.
2.Проверить рациональность применение теоремы косинусов в решении задач на нахождение угла между гранями стереометрической фигуры.
3.Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.
4.Познакомить одноклассников с полученными результатами.
5.Изучить их мнение.
6.Выявить перспективу на будущее.

Итак, предметом исследования являлись задачи на трехгранные углы.
Объектом исследования являлись рациональность и доступность решения этих задач с помощью теоремы косинусов для трехгранного угла
Методы исследования:

1.Анализ учебной литературы.
2.Сравнение различных способов решения.
3.Тестирование и анализ учебной деятельности одноклассников.

Практическая значимость предлагаемой работы заключается в создании обучающего материала, который можно использовать учителям для подготовки учащихся к ЕГЭ и для индивидуального обучения.
Список основной использованной литературы:

1. Геометрия 11 класс [текст]/Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич.- 8-е издание-дрофа,2012 год.-362с
2. Математика. ЕГЭ 2013. Многогранники : типы задач и методы их решение [текст]/Корянов А.Г. Прокофьев А.А.-102с
3. Элементарная геометрия. Том 2 Стереометрия ,преобразования пространства [текст]/. Я.П. Понарин.-М.:издательство –Москва МЦНМО,2006год
4. Геометрия. 10 – 11 класс [текст]/И. М. Смирнова, В. А. Смирнов.

M2040
(Математика)

Лемешко Елизавета Сергеевна 9 класс (г. Речица), Сандрыгайло Янина Игоревна,8 класс (г. Гомель)
Научный руководитель**:** Горский Сергей Михайлович, ассистент кафедры математического анализа УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины».

Постановка задачи: В данной работе исследована задача M2040 из журнала «Квант». Было произведено обобщение задачи: найдено при каком наименьшем натуральном k для произвольных p и q существует хотя бы одно решение неравенства

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}{p} < x_1 + x_2 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_k^3}{q}$$

в положительных числах $x_1, \ldots, x_k$.
Для некоторых значений α и β была исследована аналогичная задача для неравенства

$$\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_k^\alpha}{p} < x_1 + x_2 + \cdots + x_k < \frac{x_1^\beta + x_2^\beta + \cdots + x_k^\beta}{q}.$$

Основные результаты: Для случая $\alpha = 2, \beta = 3$ было найдено $k = k(p, q)$. Для ряда значений α и β было показано, что $k = 1$.
Возможные пути развития задачи: Исследовать для оставшихся значений α и β.
Список основной использованной литературы:

1. Cirtoaje, Algebraic Inequalities: New and Old Methods, GIL Publising House, 2006, p. 267.