БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС 2020
Санкт-Петербург, 3-6 февраля 2020 года

Исследование и моделирование фракталов

«Математика»

Байдаков Артем Евгеньевич, Легович Маргарита Владимировна (научный руководитель, учитель математики), место выполнения работы: МБОУ "Нижнесортымская СОШ"

Кто хотя бы раз видел фракталы – удивительно красивые и таинственные геометрические объекты, тот надолго заболел этим интересным и захватывающим научным явлением. Фрактальные рисунки – вершина вдохновения мастера на пути к совершенному единству математики, информатики и искусства. Такими представляются фракталы, которые строят современные компьютерыЦель: исследовать фракталы в природе и математике и составить программы моделирования сложных неевклидовых объектов, образы которых весьма похожи на природные. Задачи: 1. Узнать, что такое фракталы. 2. Изучить историю возникновения и развития фрактальной геометрии. 3. Ознакомиться с биографией создателя фракталов – Бенуа Мандельброта. 4. Смоделировать фракталы на языке программирования (PascalABC).5. Рассмотреть решение фрактальной задачи раскроя коробки оптимального объёма.

Существует определённая проблема: можно ли с помощью программирования смоделировать фракталы, и если можно, то в каких целях и где это можно применить?Гипотеза: если изучить закономерность построения фрактала, то его можно смоделировать с помощью компьютерных программ.Методы исследования: сравнительный анализ, синтез, моделирование.

Именно поэтому работу по изучению способов программирования следует продолжить, изучая при этом возможности других языков программирования и попытаться составить программы для построения многомерных поверхностей.Практическое применение данного вопроса подразумевает возможность создания средствами программирования живых моделей любых фрактальных объектов на основе составления программ для самоподобных форм.

Таким образом, рекурсивная программа должна иметь как минимум два пути выполнения, один из которых предполагает рекурсивный вызов (случай «сложных» данных), а второй – без рекурсивного вызова (случай «простых» данных).Рекурсивную программу всегда можно преобразовать в нерекурсивную (итеративную, использующую циклы), которая выполняет те же вычисления.

Список литературы:

1. Википедия. – (http://wikipedia.org/wiki)
2. Способы построения фракталов. – (http://sworm.narod.ru/)
3. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы / Шредер М.- М., «Просвещение», 2001 г., 528с.

Сдвиги многочленов с целыми корнями

«Математика»

Маршунина Дарья Александровна, Алякин Владимир Алексеевич (научный руководитель, Кандидат физико-математических), место выполнения работы: в школе

Два многочлена с целыми коэффициентами P(x) и Q(x) степени n назовём дружными, если каждый из них имеет, с учетом кратности, n целых корней и для любого x выполняется равенство:P(x) – Q(x) = C, где C – некоторое число. Задача 1. 1.1. При каких n существуют пары дружных многочленов степени n?1.2. Существует ли бесконечно много таких пар?1.3. Для любого ли многочлена с целыми корнями существует дружный с ним многочлен? Другими словами, можно ли многочлен с целыми корнями сдвинуть так, чтобы сдвинутый многочлен также имел целые корни?Задача 2.Существует ли семейства (тройки, четверки и т.д.) дружных многочленов степени n?Задача 3.Описать общий вид дружных многочленов степени n.

При работе над поставленными задачами доказывались теоремы и осуществлялся поиск пар и семейств «дружных» многочленов с помощью компьютерных программ.

Доказано, что существует:-бесконечно много пар «дружных» многочленов 1 степени с целым корнем. Для любого многочлена 1 степени с целым корнем существует бесконечно много «дружных» с ним многочленов;-бесконечно много пар «дружных» многочленов 2 степени с целыми корнями. Для любого многочлена 2 степени с целыми корнями существует бесконечно много «дружных» с ним многочленов; -бесконечно много пар «дружных» многочленов 3 степени с целыми корнями;-бесконечно много пар «дружных» многочленов 4 степени с целыми корнями.

Исследование в работе доведено до многочленов степени 4. Для многочленов больших степеней задачи представляются трудными и пока не решены. Но в дальнейшем планируется изучение многочленов больших степеней.

Список литературы:

1. Дорофеев Г. В., Пчелинцев С. В. Многочлены с одной переменной. М.: Просвещение, 2001.
2. Постников М. М. Устойчивые многочлены. М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. Mordell L. J. Diophantine equations. New York: Acad. Press, 1969.

Факторизуемые чётные функции

«Математика»

Моисеев Никита Андреевич, Алякин Владимир Алексеевич (научный руководитель, кандидат наук), место выполнения работы: в школе

Как известно, все функции делятся на 3 вида: четные функции, нечетные функции и функции общего вида (не являющиеся ни четными, ни нечетными). В настоящей работе вводится свойство функции, более сильное чем четность. Естественно называть такие функции «сильно четными», или «факторизуемыми». Здесь и далее применяются оба понятия. Функция f(x) называется сильно четной (или факторизуемой), если существует такая функция g(x), что $D(f)=D(g)\cap(-D(g))$ и для любого $x\in D(f)$ выполняется равенство: $f(x)=g(x)*g(-x)$. Основной целью работы является исследование класса факторизуемых функций. Особое внимание уделено подклассу факторизуемых многочленов.

Для достижения результатов были использованы различные методы математических доказательств и некоторые компьютерные программы (например yotx.ru).

Кроме того, были получены различные промежуточные результаты и следствия, а также выдвинуты и подтверждены для некоторых случаев важные гипотезы о сумме факторизуемых многочленов.

В ходе работы мной был исследован класс факторизуемых (или сильно чётных) функций, в особенности его подкласс — факторизуемые многочлены. Планирую продолжить исследования в этой области. На данный момент идёт работа над доказательством гипотез, выдвинутых в ходе исследования.

Список литературы:

1. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. I. - М.: Наука, 198
2. - с.
3. Прасолов В. В. Многочлены. -М.: МЦНМО, 200
4. -336 с.

Изучение непериодических замощений из прямоугольных треугольников

«Математика»

Федоренко Дмитрий Сергеевич, Аллахвердов Андрей Арменович, Заводов Алексей Александрович (научный руководитель, учитель математики), место выполнения работы: в школе

Придумать несколько новых непериодических замощений из треугольников с углами 30,60,90 градусов и доказать их непериодичность.Также выдвинуть и по возможности доказать несколько гипотез про непериодические замощения из треугольников с углами 30,60,90 градусов.Это исследование востребовано т.к. на данный момент очень мало научных текстов посвященных непериодическим замощениям.

Инструменты: Geogebra Ckassic 6

На данный момент мы придумали и визуализировали 4 непериодических замощения из прямоугольных треугольников с улами 30,60,90 градусов.Также мы доказали их непериодичность.

Дальше мы собираемся придумать еще несколько непериодических замощений из этих треугольников и выдвинуть гипотезу про замощения из прямоугольных треугольников. Также мы собираемся работать не только с треугольниками с углами 30,60,90 градусов.

Список литературы:

1. мозайка пенроуза - https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling

Фигура, которая не делится на две равные части

«Математика»

Первак Егор Александрович, Заводов Алексей Александрович (научный руководитель, учитель математики), место выполнения работы: в школе

Задача исследования заключается в том, чтобы найти фигуры, которые невозможно разделить на две равные части, и доказать данное положение. В современных исследованиях, посвященных теме разрезания, некоторые из таких фигур уже рассматривались []. Значимость данной работы определяется недостаточной изученностью разрезания разносторонних треугольников. Для рассмотрения был выбран именно треугольник, потому что эта фигура имеет минимальное количество сторон, что упрощает доказательство его неразделимости на две равные части. В работе использованы следующие термины: 1) равные многоугольники – многоугольники, у которых все стороны попарно равны; 2) сечение – линия разреза, находящаяся внутри фигуры; 3) сторона от сечения – сторона полученного многоугольника, лежащая на сечении; 4) концы сечения – точки сечения на границе треугольника.Данный проект посвящен рассмотрению различных способов разрезания разностороннего треугольника. При этом все эти способы определены и построены геометрические модели, позволяющие наглядно рассматривать многоугольники, полученные в результате сечения исходной фигуры, и производить необходимые доказательства.

В исследовании использовались общие методы – анализ, синтез, моделирование, описание, сравнение. Для проведения данного математического исследования использовались компьютерные программы, такие как Geogebra с целью моделирования многоугольников, Word и Power Point для создания текста и презентации проекта.

При исследовании разностороннего треугольника выявлены 7 возможных случаев расположения концов сечений: 1) из вершины в противоположную сторону, 2) из вершины в прилегающую сторону, 3) из вершины в другую вершину, 4) из стороны в ту же сторону, 5) из стороны в другую сторону, 6) из вершины в ту же вершину, 7) полностью внутри фигуры. Показано, что равенство многоугольников, на которые делится исходный треугольник невозможно. Доказано, что разносторонний треугольник является фигурой, неделимой на две равные части.

Проведенное исследование позволяет наметить возможные пути развития задачи: 1) Найти другие фигуры, которые не делятся на две равные части2) Найти алгоритм, который определяет, делится ли фигура на две равные части 3) Найти фигуру, которая не делится на три и более равные части.

Список литературы:

1. Болтянский В.Г., Савин А.Н. Равновеликие и равносоставленные фигуры. Гостехиздат, 195
2. 64 с.
3. Разрезание на две равные части, часть первая [Электронный ресурс] https://habr.com/ru/post/178341/ (дата обращения: 10.11.2019).

О приближенных решениях модифицированного уравнения Кортевега-де-Вриза и нелинейного уравнения Шрёдингера

«Математика»

Горина Вероника Олеговна, Кузнецов Олег Юрьевич (научный руководитель, учитель физики и математики), место выполнения работы: в школе

Предлагается методика построения приближенных решений уравнений в частных производных - модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза (мКдВ) и нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ), имеющих важное значение как в области прикладной математики и математической физики, так и в теоретической физике, нелинейной оптике, физике плазмы, гидродинамике.При поиске решений обоих уравнений в виде стационарных волн на определенном этапе они сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению Дуффинга с кубической нелинейностью, что и послужило появлению идеи построить новые приближенные решения последнего в виде совокупности уединенных волн -солитонов. Решения искались при краевой задаче: значения самой функции и ее первой производной на границах стремятся к нулю.

Если взять частные решения уравнения Дуффинга, локализованных далеко в пространстве переменной z= x-vt, то можно получить приближенные решения в виде суммы и разницы точных частных решений. Это возможно, если при тех значениях переменной, где значение одной функции не равно нулю, значение второй очень близко к нулю и поэтому не срабатывает эффект нелинейности, их произведение везде даёт нуль.

Основные результаты - аналитические выражения для мКдВ и для НУШ в виде "двухсолитонных" и "трехсолитонных" решений. Подстановкой в исходные уравнения было проверено, что вновь полученные приближенные решения являются таковыми с большой точностью. Представленные функции:сумма "левого" солитона и "правого" солитона, а также "левого" "антисолитона" и "правого" солитона, двух "антисолитонов", трех солитонов, трех антисолитонов и другие.

В работе дан метод построения приближенных решений нелинейных уравнений с использованием суперпозиции точных известных решений этих уравнений, но которые представляют из себя функции одной переменной, локализованные в разных областях пространства, так что нелинейные эффекты при умножении этих функций перекрестно не добавляют новых членов. В этом смысле работает аддитивность решений как в случае линейных дифференциальных уравнений.

Список литературы:

1. Н.М.Рыскин, Д.И.Трубецков. Нелинейные волны.-М.:Ленанд, 2017.-312с.
2. А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов, Н.М.Рыскин. Лекции по теории колебаний и волн. Нелинейные колебания. Саратов, 2011, 314 с.

Поиск геодезических линий на Архимедовых телах

«Математика»

Акиньшин Степан Дмитриевич, Абрамов Ярослав Владимирович (научный руководитель, Учитель математики), место выполнения работы: В школе, дома

Проблема поиска кратчайших расстояний между двумя данными точками является классической задачей геометрии. Данные расстояния называются геодезическими линиями. В пространстве особый интерес представляют замкнутые несамопересекающиеся геодезические линии. На сегодняшний день известны их примеры на некоторых гладких поверхностях; на правильных многогранниках [1, 2]; на прямоугольном параллелепипеде [3].Целью работы является изучение геодезических линий на Архимедовых телах (выпуклый многогранник, состоящий из нескольких типов правильный многоугольников, все многогранные углы равны), которые наиболее близки по свойствам к правильным многогранникам. На данный момент идёт работа над классификацией всех замкнутых несамопересекающихся геодезических линий на усечённом тетраэдре.

Изначально для поиска геодезических линий использовались развёртки многогранников, на которых сначала отмечались два параллельных ребра, соединяющиеся на многограннике; после этого точки на каждом из рёбер с аналогичным свойством. Отрезок, соединяющий эти две точки, является геодезической линией. Но данный метод не является самым оптимальным, потому что он не берёт в учёт свойства многогранника.

- Доказано, что группа ориентаций усечённого тетраэдра совпадает с группой ориентаций правильного тетраэдра. (Группа ориентаций многогранника - группа поворотов многогранника, возвращающих многогранник в исходное положение)- Была сформулирована и доказана теорема:Если замкнутая геодезическая линия на усечённом тетраэдре проходит по одной грани дважды, то она самопересекающаяся. Доказательство данной теоремы позволяет понять ограничения на замкнутую несамопересекающуюся геодезическую линию.

Несмотря на то, что список всех замкнутых геодезических линий на усечённом тетраэдре не закончен, полученный результат является важной частью в его формировании, что впоследствии поможет разработать концепт поиска геодезических линий на Архимедовых телах, Каталановых телах (многогранники, состоящие из одинаковых граней, которые не являются правильными многоугольниками) и других многогранниках.

Список литературы:

1. Dmitry Fuchs & Ekaterina Fuchs. “Closed Geodesics on Regular Polyhedra”;
2. Dmitry Fuchs. “Closed Geodesics on Regular Dodecahedron”;
3. А.А. Попов, К.О. Кизбикенов. “Шестизвенные замкнутые геодезические на прямоугольном параллелепипеде”.

Спектр фигуры

«Математика»

Митев Роман Станимирович, Попович Александр Леонидович (научный руководитель, Ассистент кафедры алгебры), место выполнения работы: в выездной школе

Пусть клеточная плоскость раскрашена в n цветов, то есть каждой клетке сопоставлен конкретный цвет из заданного конечного множества из n цветов. Пусть дана некая фигура из клеток. Положим ее на плоскость и выпишем множество цветов занятых клеток с учетом кратности. Полученное множество цветов назовем спектром фигуры.Будем говорить, что раскраска распознает две фигуры, если при любом их размещении на плоскости их спектры различны. Грубо говоря, если нам сообщат только спектры первой и второй фигур, мы всегда можем определить, какая фигура была первой, а какая второй. Во многих задачах, как олимпиадных, так и исследовательских, требуется строить раскраски, распознающие конкретные пары фигур [2]. Поэтому рассмотрение данного понятия актуально.Заметим, что слова «размещение фигуры» требуют уточнений. Естественно рассматривать три варианта, как можно трактовать эти слова:• Фигуру можно поворачивать, переворачивать и переносить по плоскости параллельными переносами;• Фигуру можно только поворачивать и переносить параллельными переносами;• Допустимы лишь параллельные переносы, без поворотов и переворотов.Проблема. Существует ли такое n, что любые две фигуры распознаются некоторой раскраской в n цветов?

Методы: программный перебор фигур состоящих из n клеток

Теорема 1. Пусть фигуру можно поворачивать, переворачивать и переносить параллельными переносами. Тогда существуют две фигуры, которые не распознаются никакой раскраской в шесть цветов.Теорема 2. Пусть фигуру можно поворачивать и переносить параллельными переносами. Тогда существуют две фигуры, которые не распознаются никакой раскраской в три цвета.Теорема 3. Пусть фигуру можно только переносить параллельными переносами. Тогда существуют две фигуры, которые не распознаются никакой раскраской в два цвета

Цель на будущее:найти такую раскраску или семейство раскрасок, которыми будут распознаваться любые две различные фигуры

Список литературы:

1. Д. Кузнецов. О методе раскраски на примере одной задачи. Квант, 2015 №3, с. 25-27.
2. А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 200
3. – 96с.

Фрактальное заполнение правильного треугольника кругами

«Математика»

Екимовская Анна Алексеевна, Екимовская Валерия Алексеевна (научный руководитель, Студентка НИУ МГСУ), место выполнения работы: В школе, кружок "Юный физик - умелые руки", Благотворительный фонд "Образование+"

Математическая задача появилась при наблюдении капелек конденсата на холодных поверхностях. Могут ли размеры капелек и их расположение быть произвольными? Сразу после начала исследования задача перешла в область математики, связанную с фракталами, потому что была замечена закономерность в уменьшении пузырьков. Цель работы заключается в исследовании площади покрытия многоугольника фрактальными кругами. Практический эффект – распылитель жидкости. Цель работы заключается в получении мелкодисперсной жидкой фазы. Такая работа часто встречается в технике, например, связана с качественным нанесением лакокрасочных покрытий. Физическая проблема привела к необходимости решить математическую задачу, связанную с исследованием свойств фрактальных кругов, вписанных в различные многоугольники. Сформулированная математическая задача определила объект и предмет исследования. Объектом исследования являются геометрические фракталы, построенные с помощью многоугольников и вписанных в них кругов. Эти объекты изучаются на предмет геометрических свойств, влияющих на физические характеристики поверхностного натяжения плёнок: площадь круга, длина окружности, соотношение между размерами многоугольников и вписанных кругов, влияние величины угла на размер вписанной фрактальной окружности и другие.

Первая задача заключалась в определении доли покрытия площади правильного многоугольника фрактальными кругами. Эта задача решалась методом вычисления суммы сходящейся геометрической прогрессии. Однако для каждого многоугольника существует своя геометрическая прогрессия, поэтому была доказана лемма о коэффициенте подобия касающихся друг друга окружностей, вписанных в угол. Доказанная лемма была применена для исследования любого многоугольника.

1. Определена доля покрытия правильного треугольника фрактальными кругами.2. Обосновано соответствие результата литературным примерам.3. Доказана лемма о коэффициенте подобия вписанных в угол окружностей.4. Выполнена проверка результата для треугольника с помощью доказанной леммы.5. Доказанная лемма применена для изучения фрактальных кругов в квадрате.6. Доказанная лемма применена для любого правильного многоугольника.7. Определена доля покрытия произвольного правильного многоугольника фрактальными кругами.

Основной математический вывод, важный для практики, заключается в доказательстве самого медленного убывания геометрической прогрессии фрактальных кругов в правильном треугольнике. Результат обобщён на многоугольник.1. Направление перспективного исследования – переход от плоской модели к объёмной, то есть от фрактальных кругов к фрактальным сферам, вписанным в многогранники.2. Интересна задача о фрактальных сферах в n-мерных пространствах.

Список литературы:

1. А. А. Кириллов. Повесть о двух фракталах. — Летняя школа «Современная математика». — Дубна, 2007.
2. Поверхностное натяжение / Физ. энц. сл. Гл. ред. А.М.Прохоров.– М.: Сов. энц., 1983.
3. https://www.resolventa.ru/spr/planimetry/regular.htm#reg1.

Числовые игры разума

«Математика»

Поплевин Никита Дмитриевич, Нирян Людмила Владимировна (научный руководитель, учитель математики), место выполнения работы: в школе

В работе рассматривается одно необычное задание, которое называют именем математика, первым предложившего его решение для частного случая, а именно «Задача Фибоначчи» (XIII в.). Суть её состоит в том, что необходимо найти квадрат такого числа X, чтобы при прибавлении к нему числа P и вычитании от него числа P получились полные квадраты. Показалось интересным попробовать расширить знания по этому вопросу. Поэтому целью работы стал поиск метода и его применение для решения задачи Фибоначчи и для остальных случаев, а также рассмотрение вопроса об её обобщении на произвольные степени рассматриваемых чисел. В ходе исследования такой метод был не только найден, а также показано его применение для решения задачи как в конкретных случаях (для n=2 и n=3), так и в общем виде. Сам Фибоначчи решил ее только для $P = 5$, причем, найдя лишь одно, частное решение, тогда как по ходу представленного в первоисточнике решения угадывалось, что решений для этого P значительно больше. Кроме того, автором первоисточника был поставлен вопрос об иррациональности входящих в решение чисел. На этот вопрос мне тоже предстояло ответить.

Применение метода Евклида по получению пифагоровых троек чисел оказалось результативным, так как достаточно теперь задавать собственные значения параметров для u, v и r, и все числа, входящие в оба равенства, найдутся однозначно. Данный метод позволил решить исчерпывающе эту древнюю задачу не только для вторых, и даже третьих степеней, но и в общем виде.

Известно, что задачу по поиску числа P Фибоначчи решил лишь для частного случая, о чем и упоминалось в сохранённых трактатах. Это обстоятельство стало интересным еще и потому, что попутно не был решен вопрос об иррациональности участвующих в равенствах чисел. По стечению обстоятельств именно упоминание Фибоначчи о Пифагоре в своей библиографии подсказало мне идею попробовать воспользоваться методом получения пифагоровых троек чисел. В результате, метод действительно помог, и мне удалось вывести все формулы.

Числа Фибоначчи, как и ряд его других замечательных математических находок, стали неоценимым вкладом в математику гармонии, которая, в свою очередь, стала отправной точкой многих открытий и в других науках. Поэтому получение новых знаний о ещё не до конца изведанных математических тайнах, которыми занимался этот великий математик, это лучшее приложение своих математических способностей, о чем и повествует моя работа.

Список литературы:

1. Грицаенко Н.П., Ну-ка, реши! М.: «Просвещение», 1998;
2. Vuzlit.ru, статья: «Леонардо Фибоначчи: вклад в науку»/ [Электронный ресурс], - Режим доступа: https://vuzlit.ru/836806/leonardo_fibonachchi_vklad_v_nauku.

Коммутатор и ассоциатор полуоктав, их свойства. Последовательности полуоктав и их сходимость

«Математика»

Волкова Карина Николаевна, Шевцова Ксения Олеговна, Козлов Александр Александрович (научный руководитель, Кандидат физ.-мат. наук), место выполнения работы: Государственное учреждение образования "Лицей г. Новополоцка"

Рассматривается множество полуоктав как обобщение множества действительных чисел. Данное множество является некоммутативным и неассоциативным, в связи с чем можно ввести понятие коммутатора полуоктав и изучить его свойства. По аналогии с последовательностью действительных чисел может быть введены и исследованы на сходимость последовательности полуоктав.

Основными методами, использованными в работе, являются методы арифметики действительных и гиперкомплексных чисел, теории пределов, а также теории матриц.

В работе для множества полуоктав введено понятие коммутатора как меры отклонения операции умножения полуоктав от коммутативности, предложен способ его вычисления. Изучены отдельные свойства ассоциатора и коммутатора, а также взаимосвязь этих операций.Кроме того, введено понятие последовательности полуоктав, арифметических операций над такими последовательностями. Даны и изучены свойства сходимости (полной и по норме) полуоктав, установлены некоторые свойства сходящихся последовательностей полуоктав.

В дальнейшем планируется ввести понятие полуоктавной функции, определенной на множестве полуоктав, и на основании введенных и исследованных в данной работе понятий предела и сходимости во множестве полуоктав, рассмотреть и изучить свойство непрерывности таких функций.

Список литературы:

1. Rosenfeld, B. Geometry of Lie groups / B. Rosenfeld. — Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 199
2.
3. Козлов, А.А. Множество полуоктав. I / А.А. Козлов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. — 201
4. — №12.

HpHq-выпуклые функции и обобщение неравенств Гёльдера, Минковского и Мюрхеда

«Математика»

Смолова Валерия Валерьевна, Горский Сергей Михайлович (научный руководитель, Преподаватель математики), место выполнения работы: дома

В работе обобщены классические неравенства Гёльдера, Коши-Буняковского, Минковского, Малера и Мюрхеда для MN-выпуклых, полу- и супераддитивных функций.

Использовали методы теорий дифференциальных уравнений и аналогию классических доказательств неравенств.

Пусть Пусть $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ является $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$-выпуклой функцией, a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ положительные числа, числа $p_j > 1$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ такие, что $\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} = 1$. Тогда для функции f справедливо неравенство:

$$\prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} f(a_{ij}) \right)^{\frac{1}{p_j}} \geq \sum_{i=1}^{n} f\left(\prod_{j=1}^{m} a_{ij}^{\frac{1}{p_j}} \right).$$

Теория MN-выпуклых функций появилась сравнительно недавно. Все полученные результаты являются новыми и по сути дают функциональное обобщение классических неравенств. В дальнейшем планируется получить интегральные аналоги данных неравенств.

Список литературы:

1. *Мурашко, В.И.* $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}\_\psi$-выпуклые функции и обобщения классических неравенств / В.И. Мурашко, С.М. Горский, Я.И. Сандрыгайло // Проблемы физики, математики и техники.— 2018.— №4 (37).— С. 98–102.

Разбиение правильного многоугольника на подобные прямоугольные треугольники

«Математика»

Васенов Иван Алексеевич, Скопенков Аркадий Борисович (научный руководитель, Доктор), место выполнения работы: На кружке

Задача: определить углы подобных прямоугольных треугольников, разбивающих правильный многоугольник, в зависимости от количества вершин многоугольника.

Для доказательства использовался следующий факт: при разбиение на прямоугольные треугольники с иными углами, количество меньших острых углов прямоугольных треугольников, оказывалось больше количества больших острых углов прямоугольных треугольников.

Результатом являлась формула, позволяющая определить, в зависимости от числа вершин правильного многоугольника, определить величину углов, прямоугольных треугольников, разбивающих его

В итоге была получена формула, определяющая разбиение правильного многоугольника на подобные прямоугольные треугольники

Список литературы:

1. М. Ласковица покрытие выпуклых многоугольников равными треугольниками.

Задача о раскраске клеток

«Математика»

Шевчук Александр Андреевич, Котина Ирина Семёновна (научный руководитель, Учитель математики), место выполнения работы: Дома

1.Есть клетчатое поле 7×7, в котором закрашивают клетки. Клетки, у которых общая сторона называются соседними. При закрашивании какой-либо клетки зачисляют столько очков, сколько у этой клетки было закрашенных соседних клеток. Закрашивают все 49 клеток и суммируют полученные очки. Докажите, что при любом порядке закрашивания клеток итоговое число очков не изменится. Найдите это число.2.Назовем поля устойчивыми, если итоговое число очков не зависит от порядка закрашивания ячеек. Итоговое число очков назовем мощностью игрового поля. Изучите поляa.Прямоугольное поле n×m.b.Треугольная сетка со стороной n.c.Сетка из шестиугольников n×m. 3.Рассмотрите поля с другим «соседством» клеток.a.Прямоугольное поле n×m, считая клетки соседними по вершине;b.Треугольная сетка со стороной n, считая треугольные ячейки соседними по вершине;c.Сетка из шестиугольников n×m, считая ячейки соседними по вершине;d.Трехмерное поле из кубиков, сложенных в параллелепипед n×m×k с различными правилами соседства клеток.1) Возможно применение предложенных в работе методов в задачах с математическими играми;2) Выведенные в ходе выполнения исследования формулы можно применять для создания ключей шифрования информации.

Индуктивный метод, метод добавления гномонов,метод анализа, метод логических умозаключений, метод обобщений, метод аналогий.

Я решил задачу о раскраске полей разных конфигураций. Для каждого поля получил формулы расчёта мощностей, доказал устойчивость каждого поля. Также изучил типы полей, в которых различны правила соседства клеток. Для каждого поля получил формулы нахождения мощностей, доказал устойчивость каждого из них. Исследовал трёхмерные поля различных конфигураций. Для этих полей получены аналогичные результаты.Таким образом, выдвинутая в работе гипотеза подтвердилась.

Выполнение исследования было интересным и полезным. Практическое применение результатов исследования я вижу в области шифрования информации. Возможно обобщение предложенной игры на случай n-мерного пространства, а также привлечение к игровому процессу большего количества участников с возможностью создавать "альянсы".

Список литературы:

1. Рид М. Алгебраическая геометрия для всех. — М.: Мир, 1991.
2. Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание. — М.: Мир, 1977.
3. Канель-Белов А.Я., Кольваджи А.К. Как решают нестандартные задачи. — М.: МЦНМО, 2004.

Ядра действий групп кос, связанных с раскрасками

«Математика»

Борисенко Роман Михайлович, Иванов Андрей Викторович, Алексеев Илья Сергеевич (научный руководитель, Студент), место выполнения работы: В школе

С помощью раскрасок кос в m цветов можно определить действие групп кос с n струнами на (Z/mZ)^n. Ранее математиками были найдены бесконечные порождающие множества для ядер соответствующих действий. Цель исследования заключается в том, чтобы по возможности упростить эти порождающие множества до конечных подмножеств.

Для доказательства того, что найденные конечные множества кос являются порождающими, использовались свойства сопряженности полускручиваний Дена, а также техники из общей теории групп.

Было найдено конечное порождающее множество для ядра действия групп кос, соответствующего раскраскам в три цвета.

Существует связь между действиями групп кос, заданными раскрасками, и представлением Бурау групп кос. Полученные результаты могут быть использованы для продвижения в доказательстве или опровержении знаменитой гипотезы о точности представления Бурау для n=4.

Список литературы:

1. Patrick Dehornoy - Action of braids on self-distributive systems.

Гомологические классы простых замкнутых кривых

«Математика»

Муратов Сергей Александрович, Шишмарёв Виктор Эдуардович, Алексеев Илья Сергеевич (научный руководитель, Студент), место выполнения работы: В школе

Рассмотрим компактную поверхность и простую замкнутую кривую на ней. Мы интересуемся, какие именно гомологические классы в первой группе гомологий поверхности могут получиться таким образом

Для изучения кривых на поверхностях были использованы техники из теории гомологий (алгебраический индекс пересечения), теории симметрий поверхностей(скручивания Дена) и теории чисел (алгоритм Евклида).

Было получено явное описание гомологических классов простых замкнутых кривых на компактных замкнутых ориентируемых поверхностях.

Полученные результаты могут найти применение при изучении связей между родом Хегора узла и другими инвариантами. В дальнейшем планируется исследовать случай, при котором компактная поверхность не является ориентируемой.

Список литературы:

1. Jeffrey R. Weeks - The Shape of Space.

Диаметры графов конечных групп

«Математика»

Горбач Марина Павловна, Хмыз Анастасия Дмитриевна (научный руководитель, Ассистент кафедры ВМ ФПМИ БГУ), место выполнения работы: Лицей БГУ

Различные приложения графов Кэли (Caley graphs) являются объектом исследований в информатике, математике, теории вычислительных систем и связи. Их свойства используются при анализе и проектировании структур вычислительных систем (ВС), а также протоколов работы распределенных алгоритмов. Одной из значимых областей применения графов Кэли в теории ВС является построение оптимальных структур сетей межмашинных связей. В данной работе исследуется один из показателей эффективности - диаметр. Данная область в нахождении диаметров графов практически не исследовалась ранее, поэтому имеет множество вопросов.Использованные термины: граф Кэли, система образующих, группа, подстановка, транспозиция.В задаче требовалось найти диаметры графов Кэли для приведённых ниже групп и различных систем образующих:1. G - циклическая группа Z_n, элементами которой являются остатки по модулю n, а операцией - сложение по модулю.2. G=D_n – группа симметрии правильного n-угольника. Через r_i обозначим поворот по часовой стрелке на угол 2pi*i/n , через s – отражение относительно некоторой оси симметрии правильного n-угольника.А также для других.Полная постановка задачи содержится в файле с работой.

В основном работа была выполнена с помощью общих комбинаторных методов: подсчёт количества инверсий в перестановках, поиск в ширину и так далее. Для улучшения восприятия некоторых рассуждений было введено понятие "репозиция".

Диаметры найдены для графов:1.Группы по модулю n с взаимно простым образующим;2. Для двух типов систем образующих в диэдральной группе;3. Симметрической группы с тремя типами систем образующих.Для диаметров остальных графов были сделаны оценки.Более полное резюме исследования содержится в прикреплённом файле.

В ходе решения были получены новые достаточно интересные результаты, сделаны оценки и выдвинуты гипотезы.Дальнейшие направления исследований:1. Нахождение диаметров для некоторых других систем образующих и вышеупомянутых групп;2. Изучения строения различных графов Кэли;3. Поиск зависимости диаметров графов в произведении групп.

Список литературы:

1. Журнал Квант, 2009-4;
2. Определения понятий «перестановка» и «подстановка» были взяты из курса алгебры МЦНМО НМУ (осень 2016);
3. Кострикин А.И., "Введение в алгебру", Часть
4.

Графы самопересечений ломаных

«Математика»

Дуль Екатерина Николаевна, Прохоров Николай Петрович (научный руководитель, магистрант ФПМИ БГУ), место выполнения работы: дома

В данной работе положено начало исследованию и описанию графов самопересечений ломаных.Они являются подклассом более общей структуры, изучавшейся ранее, а именно струнных графов: жордановые кривые A_1, A_2 ... A_n на плоскости отождествляются с вершинами графа, причём вершины A_i, A_j смежны, если соответствующие кривые пересекаются. В случае ломаной вместо кривых A_1,...,A_n рассматриваются её звенья и по аналогии строится граф самопересечений.Описание свойств струнных графов и их подклассов до сих пор является открытой задачей, в рамках которой проведено наше исследование.Главной задачей является наиболее полно характеризовать графы самопересечений ломаных, исследовать их как математический объект.Основные понятия и определения работы:PC-графы – класс графов пересечений незамкнутых ломаных на плоскости. CPC-графы – класс графов пересечений замкнутых ломаных.Круговые графы – граф пересечений конечного множества хорд окружности, что не имеют общих точек, принадлежащих данной окружности. SEG-граф – граф пересечений конечного числа отрезков на плоскости.

В ходе исследования было использовано сочетание геометрических и комбинаторных рассуждений, позволивших отразить свойства геометрического объекта(ломаной на плоскости или решётке) в графе. Также был применен ряд теоретико-графических инструментов.

Получены свойства PC/CPC-графов: оценки на количество ребер, запрещенные подграфы и операции, сохраняющие принадлежность к классам PC/CPC.Описана связь между PC/CPC-графами и классами струнных, SEG, круговых графов. Любой круговой можно пополнить изолированными вершинами до CPC-графа.Даны нижняя и верхняя оценки количества различных k-регулярных CPC-графов, найдено максимальная и минимальная возможная степень вершин в таком графе. Аналогичные вопросы изучены для графов самопересечений ломаных на целочисленной решетке.

Результаты работы позволяют уточнить свойства струнных графов, а также указывают на то, что классы PC и CPC имеют сложную структуру. В будущем планируется исследовать аналогичные классы графов в других пространствах, а также дополнить характеристику уже имеющихся.

Список литературы:

1. R.E. Tarjan et al. Intersection Graphs of Curves in the Plane.
2. J. Kratochvil.A special planar satisfiability problem and a consequence of its NP-completeness.
3. J. Chalopin. Every Planar Graph is the Intersection Graph of Segments inthe Plane.

Транзитивность графов

«Математика»

Мурманцева Злата Ильинична, Прохоров Николай Петрович (научный руководитель, Магистрант ФПМИ БГУ), место выполнения работы: Дома

В данной работе исследуется класс транзитивных графов. Неориентированный граф G=(V, E) назовем n-транзитивным графом, если для любых двух вершин u и v, между которыми в G существует простой путь длины n, проведено ребро (u,v). Назовем n-пополнением графа G такой минимальный по включению граф H, который является n-транзитивным и содержит в качестве подграфа граф G. Аналогичным образом введем понятия n-транзитивности и n-пополнения для орграфов. Также будем считать орграф G n-сильно-транзитивным в том случае, если от вершины v до вершины u существует путь длины n, в котором все вершины не обязательно различны, то в G проведено ребро (v, u).Случай неориентированных n-транзитивных графов для n >2 ранее исследован не был. Тем не менее большое количество результатов было получено для n-транзитивных сильно связных орграфов, в частности, такие графы были полностью классифицированы для n= 2,3,4. Также в статьях из литературы исследуются свойства сильно связных n-транзитивных графов, которые содержат ориентированный цикл достаточно большой длины. К тому же 2-транзитивные ориентированные графы используются в некоторых приложениях в биоинформатике.

В ходе работы были использованы теоретико-графовые и комбинаторные методы, а также некоторые результаты из теории алгоритмов.

Были полностью классифицированы все n-транзитивные неориентированные графы, n-пополнения и числа транзитивности произвольных неориентированных графов, исследована алгоритмическая составляющая задачи. Для ориентированных графов было рассмотрено свойство n-сильной-транзитивности, в частности, были описаны сильные n-пополнения орграфов, которые содержат ориентированный цикл длины n, а также n-пополнения сильно связных орграфов не содержащих циклов длины больше 2.

Таким образом, нами был получен ряд новых результатов позволяющих уточнить структуру класса транзитивных графов.В дальнейшем планируется более глубоко исследовать свойства сильно-транзитивных ориентированных подграфов.

Список литературы:

1. C.Hernandez-Cruz,3-transitive digraphs;
2. C.Hernandez-Cruz, The structure of strong 4-transitive digraphs;3 .J.Jacob et al. Detecting hierarchical structure in molecular characteristics of disease using transitive approximations of directed graphs.

Математический расчет числа отражений в системах зеркал

«Математика»

Антонова Ксения Дмитриевна, Тодоров Евгений Игоревич (научный руководитель, Учитель математики), место выполнения работы: в школе

Я заинтересовалась данной темой после того, как приняла участие в «Турнире юных математиков», где я встретилась с такой задачей. Пусть на плоскости вдоль прямой светит лазерный луч. В вашем распоряжении есть несколько зеркал в виде отрезков (длину отрезков можно выбирать на своё усмотрение). Если поместить зеркало на пути луча, свет отразится от него по закону «угол падения равен углу отражения». Введем условие, при котором лучу разрешено отражаться от каждого отрезка лишь по одной точке (но количество отражений луча в этих точках неограниченно). Основной целью задачи стало исследование количеств отражений, возможных в данной системе зеркал. Цель работы будет достигаться путём решения следующих исследовательских задач:1. Рассмотреть количества отражений в системах зеркал на конкретных примерах.2. Вывести формулы по нахождению наибольшего количества отражений в любой системе зеркал при определенных условиях.3. Вывести правило, по которому будет определяться множество отражений, возможных для данной системы зеркал.Система зеркала была представлена в виде графа. Граф (в математике) — абстрактный математический объект, представляющий собой множество вершин графа и набор рёбер, то есть соединений между парами вершин. Поэтому при решении задач использовалась теория графов.

Основными методами исследования являлись изучение теории, анализ и синтез полученных знаний с целью дальнейшего продвижения в выбранной области и получения новых результатов. Эти методы показались наиболее выгодными, потому как проект по большей части представляет собой теоритическое исследование.

В результате проведения работы были выведены формулы по нахождению верхней оценки количества отражений в различных системах зеркал. Были рассмотрены ситуации, в которых луч может отражать от зеркала несколько раз, приведены обобщения. В соответствии с каждым отдельным случаем было выведено правило, по которому можно определять всевозможные количества отражений в системах зеркал. Произведен анализ конкретных примеров, результаты исследований оформлены в виде таблиц.

Данная задача интересна с научной точки зрения, потому что некоторые вопросы этого раздела математики всё ещё остаются открытыми. Тем не менее, работа имеет и практическое значение - полученные результаты могут быть применены в оптике или охранных системах.

Список литературы:

1. Сайт http://spbtym.ru/
2. «Лекции по теории графов» В.А. Емеличев, О.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич.
3. " Point Mirror Reflection" , M. Oskar van Deventer, «The Mathemagician and Pied Puzzler: A Collection in Tribute to Martin Gardner».

БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС 2020
Санкт-Петербург, 3-6 февраля 2020 года

Концы графа Дистеля - Лидера DL(2,2)

«Математика»

Самулевич Степан Александрович, Синчук Сергей Сергеевич (научный руководитель, Научный сотрудник СПбГУ), место выполнения работы: Дома

Для начала введём необходимые определения: Лучом в графе называется бесконечный простой путь. Два луча называются эквивалентными, если существует третий луч, который проходит через бесконечное количество вершин, как первого луча, так и второго. Концом графа называется класс эквивалентности по этому отношению.В данном проекте описывается граф DL(2,2), который исследуется на количество концов. Этот граф является графом Кэли группы лампочника L_2(Z), поэтому количество его концов может принадлежать только множеству $(0,1,2,\infty)$, что следует из теоремы Фрейденталя-Хопфа.Задача состоит в том, чтобы найти количество концов графа DL(2,2).

Для работы с лучами были использованы методы комбинаторной теории групп и теории бесконечных графов.

Было найдено точное количество концов графа DL(2,2).

Полученный результат может найти применение в геометрической теории групп. В будущем планируется обобщить результат на случай DL(q,q).

Список литературы:

1. Matt Clay, Dan Margalit - Office Hours with a Geometric Group Theorist.

Дифференциальные неравенства

«Математика»

Бруёк Алексей Юрьевич, Коваль Мария Степановна, Горский Сергей Михайлович (научный руководитель, Преподаватель математики), место выполнения работы: дома

В 2017 году Ильин предложил способ явного нахождения решения дифференциальных неравенств для некоторых типов неравенств. Данная работа продолжает работу Ильина и предложен способ получения явного решения линейных однородных дифференциальных неравенств с постоянными коэффициентами второго и третьего порядка. Предложен алгоритм поиска явного решения линейных однородных дифференциальных неравенств с постоянными коэффициентами n-ого порядка.

Методы теории дифференциальных уравнений, методы интегрирования.

Теорема: пусть $y_0(x) = \exp(\lambda_1 x)(\int\limits_{x_0}^{x} H(s)\exp(\lambda_2 - \lambda_1)sds + D)$, где H — произвольная дифференцируемая невозрастающая функция и λ_1 — меньший корень соответствующего характеристического уравнения. Тогда $y_0(x)$ — решение дифференциального неравенства $ay'' + by' + c, y \leq 0$, в котором $b^2 - 4ac \geq 0$.

Теоремы о дифференциальных неравенствах широко используются в качественной теории и численных методах обыкновенных дифференциальных уравнени, а также в математическом анализе. В дальнейшем мы планируем найти явное решение для систем линейных дифференциальных неравенств с постоянными коэффициентами.

Список литературы:

1. Ильин Ю.А. Общие вопросы интегрирования дифференциальных неравенств в явном виде // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 201
2. Т. 4 (62). Вып.
3. С. 597–607.

Структура сингулярных обобщенных функций с точечными носителями

«Математика»

Баринов Петр Михайлович, Куликов Петр Алексеевич (научный руководитель, Студент СПбГУ, 3 курс), место выполнения работы: в школе

Математическая физика изучает решение дифференциальных уравнений высших порядков. В частности, если рассмотреть линейный дифференциальный оператор, то подобрав нужные коэффициенты он может стать оператором Лапласа. Мы изучили поведение решения линейного дифференциального уравнения на прямой, при условии что у решения есть особенность в нуле(не более чем степенная). А именно мы нашли другое решение для этого дифференциального оператора, которое не имеет особенностей и нашли его связь с предыдущим решением. Оказывается они отличаются на действие какого-то другого линейного дифференциального оператора на фундаментальное решение первого оператора. Назвали это утверждение теоремой об устранимой особенности решения линейного дифференциального уравнения. Свели этот случай к случаю в трехмерном пространстве и показали что можно брать например оператор Лапласа, и таким образом рассматривать уравнения теплопроводности или волновое уравнение и для них устранять особенность их решения в нуле. Поэтому эта задача, достаточно значима в современных исследованиях математической физики.

Для решения этой задачи нам помогла теория обобщенных функций или распределений. А именно нам помогло изучение структуры сингулярных обобщенных функций. Сингулярные обобщенные функции, в каком то смысле, являются функциями с особенностями, поэтому именно их изучение повлекло к нахождению такой важной теоремы об устранимой особенности для решения линейного дифференциального уравнения.

Основным результатом работы является доказательство теоремы об устранимой особенности для решения линейного дифференциального уравнения Также были получены промежуточные результаты в области обобщенных функций:вид обобщенных функций с точечным носителем, и необходимые условия для выполнимости формулы, о которой мечтает любой школьник, учащийся интегрировать. Формула заключается в том, что интеграл от произведения двух функций равен произведению интегралов этих двух функций по отдельности.

Резюмируя: устранили особенность в линейном дифференциальном уравнении. Дальнейшие исследования, связанные с этой задачей, которые будут еще более важны в теории уравнений математической физики. Например можно рассмотреть задачу на комплексной плоскости для мероморфной функции. Возможно применение нашей задачи в теории дифференциальных уравнений, динамических системах, квантовой физике и математической статистике.

Список литературы:

1. М.И. Вишик. Обобщенные функции. МГУ, 1997.
2. С.Н. Васильев, В.Т. Шевалдин. Гармонический анализ. Екатеринбург, 2014.

Раскраска поверхностей

«Математика»

Бекетов Егор Данилович, Хазалия Лиана Бадриевна (научный руководитель, бакланавр БГУ), место выполнения работы: Лицей БГУ

Относительно различных композиций преобразований на различных поверхностях находится множество раскрашенных точек, устойчивое к рассматриваемой композиции преобразований.

Комбинаторика, неравенства, геометрия.

Решили всю сформулированную постановку, привели красивые обобщения для различных поверхностей.

Проведено обширное исследование комбинаторно-геометрической задачи.

Список литературы:

Нет.

Расчет перемещения объектов

«Математика»

Калинчук Валерия Валерьевна, Калинчук Валерий Николаевич (научный руководитель, Учитель математики), место выполнения работы: в школе

Имеется дорожка из клеток. А также объекты, находящиеся на одном из концов дорожки. За один ход считается:1. Перемещение на одну клетку.2. Прыжок через соседний объект.3. Прыжок через несколько объектов, между которыми есть свободная клетка. На дорожке 1×25 имеется четыре объекта. За какое минимальное количество ходов их можно переместить на другой конец дорожки. За сколько ходов один объект пройдет дорожку размером 1×f. За сколько ходов два объекта пройдут дорожку 1×f. За сколько ходов m объект пройдут дорожку 1×f. За сколько ходов m объект пройдут поле m×f.

В работе получены формулы для расчета количества ходов за которое объект преодолеет данное расстояние.

Решены такие задачи, как:1. За сколько ходов 4 объекта пройдут поле 1×25 (частный случай)Ответ: за 32 хода2. За сколько ходов 2 объекта пройдут поле 1×f (общий случай)k=f-23. За сколько ходов 3 объекта пройдут поле 1×f (общий случай)k=3([f/2]-1)-2(f+1)/24. За сколько ходов m объектов пройдут поле 1×f (общий случай)k=3([f/2]-1)-(⌈m/2⌉*2-4+2(f+1)/2)5. За сколько ходов m объектов пройдут поле m×f (общий случай)k=(m-6m/2)/2 (f+2)+2m/2(3([f/2]-1)-2(f+1)/2+8)

В современном мире автоматических систем хранения и перемещения объектов на складах и транспорте результаты исследования могут быть применены для создания алгоритмов оптимального размещения. Развитие данной задачи возможно для пространства.

Список литературы:

БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС 2020
Санкт-Петербург, 3-6 февраля 2020 года

Проверка изоморфности склеек из правильных многоугольников

«Математика»

Пакульневич Константин Михайлович, Золотов Борис Алексеевич (научный руководитель, Преподаватель ЛНМО), место выполнения работы: в школе

Работа основона на теорема Александрова и алгоритме Чена-Хана и рассматривает склейки из правильных многоугольников.Цель данного проекта — разработать эффективный алгоритм проверки изоморфности двух развёрток, то есть того, что им соответствуют одинаковые многогранники. В работе используется понятие развертки. Развёртка многогранника — совокупность многоугольников с указанием того, какие стороны и вершины многоугольников должны быть склеены и соответствуют одним и тем же точкам. Теорема Александрова утверждает существование единственного выпуклого многограника, соответствующего данной развертке, если для неё выполнены несколько простых свойств.Алгоритм Чена-Хана, используемый в работе, позволяет находить кратчайшие путь на поверхности многогранника.

Были использованы базовые техники теоретической информатики и вычислительной геометрии, с их помощью были описаны основные алгоритмы и установлена их вычислительная сложность.

Найден алгоритм, решающий задачу проверки изоморфности за $O(n^2)$, задача был обобщена для других правильных многоугольников. В ходе выполнения работы был найден алгоритм нахождения вершин в склейках из трех-, четырех- и шестиугольников.Также были описаны все кратчайшие последовательности — то есть последовательности многоугольников, по которым проходит кратчайший путь — для развёрток из квадратов.

Работа даёт возможность имплементации программы, перечисляющей все возможные многогранники, склеенные из n квадратов, подводит под это необходимую теоретическую базу. В качестве продолжения исследования может выступить попытка уменьшить вычислительную сложность алгоритма проверки изоморфности вплоть до линейной.

Список литературы:

1. Александров, А. (1950). Выпуклые многогранники.
2. Arseneva, E., Langerman, S., and Zolotov, B. (2019). A complete list of all convex shapes made by gluing regular pentagons.
3. J.Chen and Y.Han, Shortest paths on a Polyhedron.

Гомотопическая классификация конфигурационных пространств графов

«Математика»

Грищенко Илья Иванович, Айвазьян Аршак Владимирович (научный руководитель, Студент СПбГУ), место выполнения работы: В школе

Основной объект данной работы- конфигурационное пространство.Пусть G- компактное топологическое пространство. Мотивация к определению пространства конфигураций G в X : пространство точками, которого являются вложения G в X, а путями — объемлющие изотопии.Формальней неупорядоченное конфигурационное пространство- это фактор пространства вложенией G в X с топологией, похожей на компактно-открытую (но несколько богаче, засчет того, что дополнительно объявлены открытыми множествами классы изотопности) по отношению "равенство образов".Изначально нашей целью было вычисление фундаментальных групп пространств конфигураций топологических графов в плоскости. Но в ходе вычисления мы классифицировали эти пространства с точностью до гомотопической эквивалентности.

Для вычислений гомотопического типа мы нашли в конфигурационном пространстве деформационный ретракт, гомеоморфный прямому произведению плоскости на окружность. При факторизации конфигурационного пространства по "равенству образов" в зависимости от графа окружность либо склеивается в точку, либо (складываясь n раз) остается окружностью.

Теорема. Для любого графа G : конфигурационное пространство G в плоскости гомотопически эквивалентно окружности или стягиваемо.

В дальнейшем мы планируем классифицировать конфигурационные пространства графов в плоскости с точностью до гомеоморфности.

Список литературы:

1. Есть направление в математике по исследованию конфигурационных пространств точек. А среди обобщений этого понятия нам удалось найти только "Configuration spaces of rings and wickets (Brendle, Hatcher)", на которую нам не пришлось ссылаться в работе.

Гарантированный поиск в топологических графах

«Математика»

Шутова Саша Степановна, Айвазьян Аршак Владимирвич (научный руководитель, Студент СПбГУ), место выполнения работы: В школе

Задача гарантированного поиска в тонком пространстве формально ставится таким образом : дан топологический граф X, требуется найти такое наименьшее натурально число n, что существует такой набор стратегия на n преследователях, являющаяся штурмом. Это число называется поисковым числом графа (точнее реберно-поисковым).Стратегией на n преследователях называется набор из n непрерывных функций, действующих из отрезка в X.Штурмом называется стратегия, такая, что для любой непрерывной функции из отрезка в X существует вещественное число $t \in [0, 1]$ такое, что $f(t) = g(t)$ для некоторого g из стратегий.

Придумав новую задачу, где траектории преследователей могли конечное число раз прерываться, доказали, что она эквивалентна исходной. В новой формулировке мы доказали теорему о монотонности: если существует штурм на n преследователях, то существует штурм на n преследователях без потери территории. Теперь, чтобы доказать, что граф не штурмуется n преследователями мы показываем, что любой стратегия на n преследователях не является монотонной.

Нашим основным результатом является доказательство теоремы о нижней границе поискового числа для всех топологических графов. Результат основан на лемме о монотонности стратегии. Кроме того, мы оптимизировали применение этой теоремы для всех топологических графов.

Одной из приоритетных целей нашего исследования, которую нам пока не удалось достичь, является вычисление поискового числа для графов Кэли групп, являющихся прямыми произведениями двух циклических групп (т.е. для "каркасов тора").

Список литературы:

1. Головач П. А. Минимальные деревья с данным поисковым числом Дискретная математика. 1992.
2. Абрамовская Т. В., Петров Н. Н. Теория гарантированного поиска на графах Вестник СПбГУ. Сер.
3. 201
4.

БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС 2020
Санкт-Петербург, 3-6 февраля 2020 года

Ассоциативные многочлены над полями вычетов

«Математика»

Молчанов Константин Алексеевич, Айвазьян Аршак Владимирович (научный руководитель, Студент СПбГУ),
место выполнения работы: Школа

Каждый многочлен P от двух переменных над кольцом R индуцирует структуру магмы. Наша задача состоит в том, чтобы исследовать ассоциативность этой структуры в терминах многочлена.Эта задача в несколько другой постановке уже исследовалась математиками (см. литературу) : где вместо ассоциативности многочлена как бинарной функции, исследовалась ассоциативность многочлена как формального выражения. Но все многочлены обладающие "формальной ассоциативностью" имеют вид axy + bx + cy + d, когда, например, многочлен x^2 ассоциативен над кольцом Z\3Z.

Элементарный метод теории колец.

Были классифицированы все линейные ассоциативные многочлены над областью целостности и все ассоциативные над Z/2Z.

Дальнейшие пути развития задачи классификация ассоциативных многочленов над некоторыми другими кольцами вычетов.

Список литературы:

1. (Brawly , Shuhong , Mills) "Associative rational functions in two variables".

Геометрия свободных нильпотентных групп

«Математика»

Семидетнов Артём Алексеевич, Магдиев Руслан Тимурович (научный руководитель, Студент 1 курса), место выполнения работы: в школе

Мы рассматриваем свободные нильпотентные группы и изучаем их геометрию. Случай первой ступени (свободные абелевы группы) и второй ступени (дискретная группа Гейзенберга и её аналоги) нильпотентности был подробно изучен математиками: известно явное выражение для расстояния между двумя элементами, существует описание геодезических (для дискретной группы Гейзенберга оно тесно связано с минимальными по периметру полимино) и т.п. Сверхзадачей данного исследования является описание подобных геометрических аспектов для групп более высоких ступеней нильпотентности.

Мы описываем и используем новые модели для графов Кэли свободных нильпотентных групп и опираемся на связи между моделями разных ступеней нильпотентности. Кроме того, мы обобщаем на более общий случай и используем понятие рокировки, впервые данное для групп ступеней один и два.

Мы устанавливаем геометрический критерий эквивалентности двух слов в алфавите стандартных образующих. Кроме того, мы указываем геометрическую интерпретацию нормальной формы в терминах площадей некоторых проекций.

Полученные результаты являются фундаментом для создания общей геометрической модели свободных нильпотентных групп, в рамках которой возможно описание их геометрических аспектов.

Список литературы:

1. M. Shapiro, A geometric approach to the almost convexity and growth of some nilpotent groups, 1989

О структуре порождающих множеств группы биекций счетного множества

«Математика»

Денисова Александра Денисовна, Семенов Андрей Вячеславович (научный руководитель, аспирант ПОМИ РАН),
место выполнения работы: ЛНМО

Симметрическая группа S(Q) является большой группой по неформальной классификации А. М. Вершика, что означает трудность в изучении даже частных случаев и подгрупп. В частности, почти ничего не известно про системы порождающих множеств данной группы. Джордж Бергман доказал ряд утверждений про моноиды, которые при некоторых условиях порождают всю группу S(Q), а также доказал, что в этой группе не существует бесконечных рядов собственных вложенных друг в друга подгрупп. Однако большая часть результатов Бергмана не может быть применена на практике в силу чрезвычайно редкого выполнения условий его утверждений. Нами был поставлен вопрос отыскания критериев порождения для некоторых специальных подмножеств S(Q). Про произвольные порождающие множества известно крайне мало, и сформулировать четкие критерии того, является ли множество элементов порождающим для бесконечной симметрической группы, по-видимому, невозможно в силу слишком больших размеров группы. Однако этот вопрос разрешим для некоторых специальных подсистем - в частности, нами были рассмотрены подмножества "локально-конечных" перестановок LF, "кольцевых" перестановок R и "диких" перестановок W. Основной результат, доказанный нами, состоит в том, что каждое из этих множеств является порождающим для S(Q).

Методы классической теории групп, счет перестановок в циклах.

Перестановка f называется локально конечной, если для любого x из Q орбита x конечна. Множество локально-конечных перестановок будем обозначать через LF.Перестановка f называется кольцевой, если она имеет лишь конечное количество орбит. Множество кольцевых перестановок будем обозначать через R.Перестановка f называется дикой, если у нее есть бесконечно много бесконечных орбит. Множество диких перестановок будем обозначать через W.Основной результат: каждое из множеств LF,R и W является порождающим множеством для S(Q)

Данная работа решает вопрос порождения для частной серии подмножеств S(Q). Возможным путем развития задачи является обобщение данной работы на более широкий класс подмножеств.

Список литературы:

1. George M. Bergman, Generating infinite symmetric groups
2. H. D. Macpherson and Peter M. Neumann, Subgroups of infnite symmetric groups
3. Stephen W. Semmes, Infnite symmetric groups, maximal subgroups, and filters

Функции дырявости

«Математика»

Фарафонов Егор Александрович, Мукосеев Лев Андреевич, Сергей Олегович Иванов (научный руководитель, Кандидат наук), место выполнения работы: в школе

Понятие числа дырок в какой либо фигуре можно формализовать несколькими способами. Обычно эта формализация происходит на языке теории гомотопий, а под “фигурой” понимается либо топологическое пространство, либо симплициальный комплекс (либо другая модель пространства). Мы будем говорить на языке симплициальных комплексов. Так как мы говорим на языке теории гомотопий, мы требуем гомотопическую инвариантность от числа дырок. Обычно под числом дырок понимают первое число Бетти. Но оказывается, что число Бетти не удовлетворяет некоторым естественным требованиям на число дырок. Мы задались вопросом о том, какие условия должны быть выполнены чтобы какое-то число, ассоциированное с симлициальным комплексом, можно было бы назвать числом дырок этого симлициального комплекса.

Были использованы методы алгебраической топологии и теории симплициальных комплексов.

Теорема 1. Для любого поля F функция N : SC → Z, заданная по формуле: N(K) = \beta_1(K, F) − \beta_2(K, F), является нормальной функцией дырявости.Теорема 2. Для любого поля F и любой последовательности чисел n3, n4, . . . функцияN : SC → Z, заданная по формулеN(K) = \beta_1(K, F) − \beta_2(K, F) + n3\beta_3(K, F) + n4\beta_4(K, F) + . . . , является функцией дырявости. Следствие 2. Множество функций дырявости континуально.Теорема 3. Любые две функции дырявости совпадают на не более чем двумерных комплексах

В нашей работе были даны ответы на все поставленные вопросы (нахождение мощности множества функций дырявости, нахождения комплекса минимальной размерности, для которого количество дырок не определено однозначно, изучение вопроса о нормальных функциях дырявости и т.д.).Во время написания работы, мы поняли, что числа Бетти не удовлетворяют естественным требований на число дырок и,что понимание о количестве дырок должно включать отрицательные числа.

Список литературы:

1. Д.Б. Фукс , А.Т. Фоменко. Гомотопическая топология. М., (1967).
2. A. Hatcher,Algebraic Topology, Cambridge University Press (2002).

О графах с единственностью геодезических или антиподов

«Математика»

Горовой Дмитрий Олегович, Змейков Давид Юрьевич (научный руководитель, Docteur es sciences), место выполнения работы: дома

Предыстория. В 1962 году в своей известной книге по теории графов норвежский математик Ойстин Оре (Oystein Ore) поставил следующую задачу: "Между любыми двумя вершинами дерева есть ровно одна геодезическая, но существуют и другие связные графы с таким свойством. Попробуйте охарактеризовать все эти геодезические графы."В противовес единственности геодезических естественным образом возникает вопрос: в каких графах у каждой вершины существует ровно один антипод (самая дальняя от нее вершина). Такие графы мы называем антиподными.Цель. Наше исследование направлено на то, чтобы описать геодезические и антиподные графы явным образом, то есть найти их конструктивную классификацию, которая позволила бы их строить алгоритмически.Применение. Изучение связей между вершинами графа и нахождение критериев существования конфигураций этих связей представляют особый интерес в моделирование сетей. В частности, геодезические графы применяются в проектировании компьютерных систем и сетей.

Важные понятия, введение которых позволило нам продвинуться изучать геодезические и антиподные графы, являются диагональ цикла (путь, соединяющий две вершины цикла и делящий его на два части большей длины) и опорное дерево графа (остовное дерево графа, такое что расстояние от его корня до любой вершины в дереве равно расстоянию между этими вершинами в самом графе).

В данной статье, мы в частности получаем следующее: алгоритмы полиномиальной сложности O(n^3) проверки графа на предмет геодезичности или антиподности; различные семейства геодезических и антиподных графов; критерий геодезичности графов с некоторым условием на его опорное дерева; критерий антиподности дерева; необходимые условия геодезичности гамильтонова графа; как присвоить положительные веса произвольному графу так, чтобы он стал одновременно геодезическим и антиподным.

В работе был получен критерий геодезичности графов с некоторым условием на его опорное дерева. Основным направлением на данный момент является обобщение данного критерия на всевозможные опорные деревья, а также изучение локально-глобальной связи.

Список литературы:

1. Oystein Ore, Theory of Graphs, American Mathematical Society, 1962.
2. Joel G. Stemple and Mark E. Watkins, On Planar Geodetic Graphs, 1968.
3. C E. Frasser, k-Geodetic graphs and their application to the topological design of computer networks (1999).

Миаметры

«Математика»

Дойникова Екатерина Алексеевна, Золотов Борис Алексеевич (научный руководитель, Преподаватель ЛНМО),
место выполнения работы: В школе

Существует много различных характеристик фигур на плоскости, таких как диаметр и площадь, но можно заметить, что среди них нет ни одной простой и хорошо изученной характеристики, которая могла бы отличить широкие и длинные фигуры от фигур, которые такими не являются. Поэтому я изучила новую характеристику фигур на плоскости, которая называется миаметр. Миаметр фигуры M — это наибольшее число d такое, что через каждую точку множества M проходят два перпендикулярных отрезка, длина каждого из которых не меньше d и которые целиком лежат в M. Также были введены вспомогательные определения: биаметр и множество Rt — наибольшее подмножество M с данным миаметром.. Задачей было исследование свойств этих характеристик.

Мною были использованы в основном элементарные геометрические техники, из них можно отметить принцип крайнего в геометрии, использование симметрии, тригонометрические функции.

Найдены миаметры простейших фигур таких как: квадрат, прямоугольник, треугольник и круг. Исследованы некоторые свойства миаметра. Введено множество Rt, доказана теорема для него и исследовано R1 для трапеции. Проведено исследование миаметра для правильных и полуправильных 2n-угольников. Исследованы свойства биаметра.

Я исследовала новую характеристику фигур на плоскости, которая называется миаметр. Эту характеристику сравнительно просто посчитать, поэтому она полезна— в частности, может применяться в картографии. Возможно продолжение исследование, так как ещё можно изучить теоретическое построение множеств Rt и вычисление миаметра для других геометрических фигур. Также возможно создание программы, которая сама вычисляет миаметры различных фигур.

Список литературы:

1. Б.А. Золотов, Д.Г. Штукенберг "Математика НОН-СТОП 2019" 2019 год

Персистентные гомологии и анализ гистологических данных

«Математика»

Каданцев Георгий Владимирович, Синицын Александр Александрович, Иванов Сергей Олегович (научный руководитель, старший научный сотрудник), место выполнения работы: в школе

В обычном процессе диагностики патолог анализирует кусочки ткани под микроскопом и ищет определенные свойства строения клеток и то, как они варьируются. Однако это может быть сложно при большой трудовой нагрузке, поэтому с недавнего времени внимание особенное обращено на компьютерные методы анализа гистологических данных (цифровых копий препаратов в сверх-высоком разрешении).При исследовании большое по размеру изображение ткани (Whole-Slide-Image, цифровая копия всего препарата) разрезается на патчи — маленькие кусочки исходного изображения. Основной характеристикой изображения для нас является персистентная энтропия изображения. Наша цель — показать, что персистентная энтропия может быть полезна в диагностике рака.

В работе используются основные понятия топологического анализа данных: персистентные модули, интервальные модули, персистентные симплициальные гомологии [1]. Мы пользуемся понятием персистентной энтропии, введенной в [2].Нами предлагается оригинальный алгоритм подсчёта персистентной нулевой гомологии.

Мы обнаружили, что для различия здоровых тканей и зараженных раком наиболее полезна энтропия нулевой персистентной гомологии изображения по каналу эозина. Видно, что среднее арифметическое значение энтропии различается: у здоровых n = 8.51, в то время как среднее значение энтропии изображений рака —- t = 8.96 (с близкими значениями дисперсии). Этот результат уже позволяет решать с задачу классификации с определенной точностью, но также может быть использован в дальнейших разработках.

Основным результатом является следующее наблюдение: среднее значение персистентной энтропии здоровых образцов ткани и больных раком заметно отличаются. Данное наблюдение может стать основой нового алгоритма диагностики колоректального рака. Кроме энтропии, в наших планах изучить другие характеристики персистентных гомологий изображений, а так же разработать другие методы получения фильтрованного топологического пространства из изображения.

Список литературы:

1. G. Carlsson: Topology and data. Bullentin of the American Mathematical Society 46, 2 (2009), 255–308.
2. David & Woosley, John & Guan, Xiaojun & Schmitt, Charles & Thomas, Nancy. (2009) A Method for Normalizing Histology Slides for Quantitative Analysis

О полиномах второй степени в теории делимости и не только

«Математика»

Кабаргин Даниела Милена, Тодоров Евгений Игоревич (научный руководитель, Педагог доп. образования), место выполнения работы: Дома

В данной работе представлено решение и изучение теории задачи Республиканского Турнира Юных Математиков (г. Минск).В условиях задачи дано, что есть младший делитель числа N(больший или равный) 2, отличный от 1, который мы будем называть d(N). И есть старший делитель числа N, отличный от самого числа N, который мы будем называть D(N) Например, d(4) = D(4) = 2, d(5) = 5, D(5) = 1, d(6) = 2, D(6) = 3. Для решения задачи мы должны разобрать пункты данной задачи.Кроме решения исходной постановки мы ставили перед собой и другие цели:1. Связать теорию данной задачи с реальными проблемами научного общества(не только математиков).2. Связать решение данной задачи с реальными проблемами научного общества.3.Доказать значимость проделанной работы описанием экспериментального применения данной работыОказалось, что для решения данной задачи нам пригодится теория квадратных уравнений, изучение которой приводит нас к верному ответу. Помимо изучения теории квадратных уравнений нам пригодилась теория делимости. Мы также представили свои обобщения к данной задаче и исследовали теорию квадратных уравнений в более широком смысле, постарались найти применения полученных результатов.

Для пункта один мы используем известные нам свойства теории делимости. Второй и третий пункты решались при помощи квадратных уравнений. Для визуализации и упрощения решения была так же написана программа для пункта два и три. Четвертый пункт решается при помощи некоторых дополнительных преобразований и выведения формул.

Наш алгоритм и созданная программа по данному алгоритму позволяет построить график квадратной функции, имеющей корни d(N) и D(N) не только без поиска самого числа N, но и быстрее, чем этот поиск

Квадратные уравнения очень хорошо применяются при расчете траектории движения планет. Хорошо квадратные уравнения участвуют в задачах на сопротивление материалов, что применяется в машиностроении и архитектуре. Используя, составленный алгоритм, мы можем упростить сложные вычисления корней уравнения. Можно попытаться напрямую связать квадратные уравнения и, к примеру, теорию сопротивления материалов, при помощи, выявленных данных.

Список литературы:

1. "New" Way To Solve Quadratic Equations That Everyone Is Talking About
2. https://www.youtube.com/watch?v=oWFRU-ula-A
3. http://kvant.mccme.ru/1992/06/kvadratnoe_uravnenie.htm
4. http://kvant.mccme.ru/1996/02/kvadratnye_uravneniya_s..

БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС 2020
Санкт-Петербург, 3-6 февраля 2020 года

О финитной отделимости квадратичных расширений моногенных колец простой характеристики

«Математика»

Качабеков Эльхан Маисоглы, Кублановский Станислав Исакович (научный руководитель, Доктор наук), место выполнения работы: дома

Задача описания финитно отделимых колец была сформулирована академиком А.И. Мальцевым в работе 1958 г., в связи с разного рода приложениями для решения алгоритмических проблем.Как показывают исследования последнего времени, описание финитно отделимых конечно порожденных коммутативных колец сводится к описанию колец простой характеристики , являющихся целыми расширениями любого своего бесконечного моногенного подкольца. Среди подобных колец важную роль играют играют квадратичные расширения моногенных колец. Одной из открытых проблем в этой тематике была проблема описания финитно отделимых квадратичных расширений. Решение этой задачи открывает путь для общего решения.Основные определения:Алгебраическая система A называется финитно отделимой, если для любого ее элемента a и для любой подсистемы A' такой, что a не из A' , существует конечная система F и гомомофизм \phi:A->F такой, что \phi(a)не из \phi(A'). Алгебраическая система A называется финитно аппроксимируемой, если для любых ее двух различных элементов a,b существует конечная система F и гомомофизм \phi:A->F такой, что \phi(a) не совпадает с \phi(b).

Для получения результата и его приложений автор применил критерии финитной отделимости колец из последней работы С.Кублановского (2019), а также теоремы А.Мальцева (1958)(об алгоритмической разрешимости проблемы вхождения для финитно отделимых колец) и теоемы M. Orzech, L. Ribes (1970) (о финитной аппроксимируемости конечнопорожденных коммутативных колец)

Были получены следующие результаты:Теорема. Кольцо Z_2<a,b| a^2+g(b)=0>, где g(x) — многочлен без свободного члена из кольца многочленов Z_2[x], является финитно отделимым тогда и только тогда, когда \phi(x)–ненулевой многочлен, в состав которого входит одночлен нечетной степени.Теорема.Кольцо Z_2<a,b| a^2+ab+g(b)=0>, где g(x) — многочлен без свободного члена из кольца многочленов Z_2[x], будет финитно отделимым тогда и только тогда, когда степень g(x) больше 1.

В финитно отделимых конечно-определенных системах алгоритмически разрешима проблема вхождения в подсистему (из работы [1]).Одним из приложений результатов является возможность алгоритмического решения проблемы вхождения элемента в подкольцо для финитно отделимых колец из теорем 1 и 2. А это нетривиальная диофантова задача в кольце многочленов с целыми коэффициентами. Развитием темы является обобщение теорем на случай характеристики большей 2

Список литературы:

1. Мальцев А.И. О гомоморфизмах на конечные группы
2. С.И. Кублановский, “О многообразиях ассоциативных алгебр с локальными условиями конечности”
3. С.И. Кублановский, “О финитной отделимости конечно порожденных ассоциативных колец“.

Комбинаторика мигающих лампочек в симметрических группах

«Математика»

Цыганенко Павел Юрьевич, Чистов Олег Дмитриевич, Магдиев Руслан Тимурович (научный руководитель, Студент 1 курса), место выполнения работы: В школе

Рассмотрим скрученное произведение конечной циклической группы и конечной симметрической группы. Требуется описать классы сопряженности в полученных группах, а также найти для них какое-нибудь комбинаторное описание.

В нашей работе мы разработали метод для описания классов сопряженности в группах мигающих лампочек, основанный на уже известном описании классов сопряженности в симметрических группах. Метод заключается обобщения понятия цикленного типа перестановки.

Было дано описание классов сопряженности в группе мигающих лампочек на симметрической группе в терминах диаграмм Юнга.

Полученные результаты обобщают известное комбинаторное описание классов сопряженности для симметрических групп.

Список литературы:

1. Adalbert Kerber - Representations of Permutation Groups, 1971

Обобщенная задача о ферзях на квадратной и треугольной доске

«Математика»

Подмаско Артём Викторович, Змейков Давид Юрьевич (научный руководитель, Docteur es sciences), место выполнения работы: Дома

Задача о расположении n не бьющих друг друга ферзей на доске n x n является обобщением задачи о восьми ферзях на шахматной доске, которая была впервые поставлена немецким шахматистом М. Беззелем в 1848 году. С тех пор она была очень популярна, обширно изучена и получила немало приложений (в частности для параллельного хранения данных, в управлении движения и VLSI тестировании).В данной работе мы рассматриваем дальнейшие обобщения задачи о ферзях, а именно отвечаем на следующие два вопроса:Пусть n и k – натуральные числа, причем $n \geq k$. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на доске n x n так, чтобы в любой строке, столбце и диагонали было не более k ферзей? Здесь имеются в виду все диагонали – главные и малые – всего их 4n - 2 при $n > 1$.Аналогичный вопрос для треугольной доски n x n x n.Расстановку ферзей на доске n x n мы будем называть k-арной, если в любой строке, столбце и диагонали стоит не более k ферзей. Через Q(k, n) обозначим наибольшее возможное число ферзей в k-арной расстановке на доске n x n.Сплошная по горизонтали расстановка – это такая расстановка, что в каждой строке доски ферзи идут один за другим слева направо, при этом разрешается переход с крайней правой клетки на крайнюю левую. Аналогично определяется сплошная по вертикали расстановка.

Комбинаторные методы,Система координат,Модулярная арифметика

Найдены точные формулы для обобщенной задачу о ферзях на квадратной и треугольной досках. А также построены сплошные центрально-симметричные расстановки.

Применение результатов исследования в решении гипотезы Моцкина.

Список литературы:

1. Jordan Bell, Brett Stevens, "A survey of known results and research areas for n-queens"
2. M.H.Le, W.Li, E.T.Wang, "A generalization of the n-queen problem"
3. W. S. Qiu, "The n queens problem"
4. G. Nivasch, E. Lev, "Nonattacking queens on a triangle"

Симметрии фрактала Серпинского

«Математика»

Бухаров Марк Алексеевич, Магдиев Руслан Тимурович (научный руководитель, Студент первого курса), место выполнения работы: В школе

Породим подгруппу в группе аффинных преобразований евклидовой плоскости тремя отображениями: сдвигами вдоль сторон правильного треугольника и гомотетией с коэффициентом $1/2$. С этой группой связан некоторой фрактал, симметрии которого и требуют изучения.

Для изучения группы мы нашли её матричное представление. Кроме того, мы использовали граф Кэли этой группы для поиска закономерностей.

Изучаемая группа оказалась HNN-расширением свободной абелевой группы ранга 2. Мы доказали, что она разрешима, но не нильпотентна, а также нашли для её элементов нормальную форму.

Полученная группа очень напоминает группы Баумслага-Солитера. В будущем хотелось бы подробнее изучить феномен возникновения HNN-расширений в теории симметрий фракталов.

Список литературы:

1. Clay, M., Margalit, D. (Eds.), Office Hours with a Geometric Group Theorist, Princeton University Press, 2017

Автоморфизмы 3-регулярного дерева

«Математика»

Пупышев Матвей Дмитриевич, Магдиев Руслан Тимурович (научный руководитель, Студент первого курса), место выполнения работы: В школе

Рассмотрим континуальную группу всех автоморфизмов графа, являющегося 3-регулярным деревом. Рассмотрим те автоморфизмы, которые сохраняют фиксированный порядок обхода смежных к вершинам рёбёр. Такие автоморфизмы образуют счётную подгруппу. Наша цель — дать описание для этой подгруппы.

Мы даём классификацию всех автоморфизмов, а затем ограничиваем её на изучаемую подгруппу. Для описание подгруппы мы используем техники теории групп.

Была дана классификация сохраняющих порядок обхода автоморфизмов: каждый автоморфизм либо сохраняет вершину, либо сохраняет ребро, либо является “сдвигом” вдоль границы некоторой компоненты дополнения графа до плоскости.

Полученные результаты позволяют найти конечное порождающее множество для подгруппы сохраняющих порядок обхода автоморфизмов.

Список литературы:

1. Clay, M., Margalit, D. (Eds.), Office Hours with a Geometric Group Theorist, Princeton University Press, 2017

Несуразная транспортировка

«Математика»

Букато Кирилл Валерьевич, Белешева Анна Романовна (научный руководитель, Студентка ФПМИ БГУ), место выполнения работы: Дома

Рассмотрим город N. Схема города- это граф, в котором ребра символизируют улицы, а вершины- перекрестки улиц. Пусть в вершинах расположены жители, которым нужно как можно быстрее попасть в определенные части города. Для простоты будем считать, что в каждой вершине расположено по одному человеку, причем в одной вершине в одну и ту же минуту может находиться не более одного человека. Пронумеруем жителей числами от 1 до n. За одну минуту жителям разрешается либо остаться в текущей вершине, либо перейти в соседнюю вершину. Тем самым, каждую минуту люди в вершинах переставляются, так что мы получаем одну из n! Возможных перестановок множества людей. Получающиеся по такому правилу перестановки мы будем считать разрешенными, а остальные запрещенными. Цель – найти те схемы городов, в которых жителям была бы доступна возможность перемещаться между вершинами к нужным им целям наиболее быстрым способом. А именно, по самым эффективным алгоритмам, которые жители прокручивают в своей голове и обмениваются друг с другом. В нашем случае алгоритм - последовательность разрешенных перестановок. В процессе исследования, для отдельных случаев добавляются другие условия. Рассмотрены такие направления как: 1) Графы без циклов 2) Графы с циклами 3)Непрерывное перемещение 4) Графы каркасы Qn мерных кубов

Особых общих методов решения задачи использовано не было, в основном, ответ достигается логическими размышлениями. Оборудования также использовано не было.

Сформулированы и доказаны несколько лемм. Была решена большая часть исходной постановки задачи(1, 2, 3 направление). Было сформулировано направление с Qn мерными кубами, однако решение пока придумано не было. Была строго доказана оптимальность в 1 и 2 направлении задачи, доказана оптимальность перемещений в тетраэдре, октаэдре и кубе. Над задачей всё ещё ведётся исследование.

Существует большое количество графов, которые можно было бы рассмотреть в исследовании. При дальнейшем развитии направлений исследования, возможно нахождение практического применения в областях градостроения, оптимизации логистики и перевозок. Также на основе задачи возможно проектирование игрушек-головоломок, вроде "пятнашек".

Список литературы:

Никакая литература в процессе исследования не использовалась.

Эффект бабочки в группах лампочника

«Математика»

Канюк Виктория Игоревна, Семашкин Михаил Георгиевич, Магдиев Руслан Тимурович (научный руководитель, Студент первого курса), место выполнения работы: в школе

Для группы лампочника, построенной по конечной циклической группе, мы рассматриваем стандартное порождающее множество, а также метрику на группе, заданную этим порождающим множеством. Рассматривается наибольшее расстояниемежду элементом, заданным произвольным словом в образующих, и элементом, заданным словом, которое получается из данного удалением одной буквы. Требуется найти получающееся число.

Задача сводится нами к поиску элемента в классах сопряженности образующих, который находится на наибольшем расстоянии от нейтрального элемента.

Для каждого натурального n для группы лампочника, построенной по циклической группе порядка n, задача была полностью решена.

В работе была изучена одна модель формализации понятия эффекта бабочки. Планируется также изучить идею подмены в слове буквы на другую букву.

Список литературы:

1. S. Cleary, J. Taback, Dead end words in lamplighter groups and other wreath products. Q. J. Math., 56(2):165–178, 2005.

Действия симметрических групп на римановых поверхностях

«Математика»

Коченюк Анатолий Евгеньевич, Алексеев Илья Сергеевич (научный руководитель, студент), место выполнения работы: в школе

Действия конечных групп на поверхностях - это важная, обширная и немало изученная тема в теории римановых поверхностей. Она напрямую связана с разветвленными накрытиями, топологией поверхностей и алгебраическими аспектами конечных групп. Ключевую связь между группами и поверхностями устанавливает знаменитая формула Римана-Гурвица. С её помощью получается полная классификация действий конечных групп на римановых поверхностях. Среди всех действий выделяют так называемые вложимые действия - такие, которые могут быть заданы изометриями евклидова пространства, в которое погружена риманова поверхность. Только циклические, диэдральные группы, A_4, A_5 и S_4 соответствуют некоторым вложимым действиям. В первых трёх случаях была получена явная классификация таких действий.Цель данного проекта — классификация действий (в том числе вложимых) симметрической группы S_4 на римановых поверхностях.

Для классификации необходимо описать так называемые "порождающие векторы" для S_4. Мы конструируем вложимые действия и используем общие методы теории групп, а также формулу Римана-Гурвица.

Получена полная классификация действий симметрической группы S_4 в терминах сигнатур действий.

Результаты работы продолжают классификацию действий конечных подгрупп группы SO(3) на поверхностях.

Список литературы:

1. Valerie Peterson and Aaron Wootton - A Tale of Two Symmetries: Embeddable and Non-embeddable Group Actions on Surfaces

Арифметические производные в полях частных над факториальными кольцами

«Математика»

Гончаренко Андрей Дмитриевич, Мурашко Вячеслав Игоревич (научный руководитель, Старший преподаватель кафедры), место выполнения работы: В школе

Арифметической производной называется отображение ':N→N, удовлетворяющие:1. p'=1, где p – простое;2. (mn)'=m'n+n'm для любых натуральных m и n.Впервые она была упомянута E. J. Barbeau (REMARKS ON AN ARITHMETIC DERIVATIVE, March 21,1961), но существенных результатов в этом направлении ранее получено не было.Решение даже таких простых дифференциальных уравнений, как x'=2a и x"=1, неизвестно и представляет существенные трудности. В работе [2] доказано, что первое уравнение имеет решение для любого a в случае, если верна гипотеза Гольдбаха, а второе уравнение имеет бесконечно много решений, если верна гипотеза о бесконечности простых чисел - близнецов. Дифференциальные уравнения вида x'=ax+1 связано с гипотезой о бесконечности простых чисел Джуги.Много авторов рассматривают данную тему для целых чисел, а мы решаем данный проблему для поля частных факториального кольца. Т.е. развитию методов работы с арифметической производной над полями частных факториальных колец и применению этих методов для решения задач в теории чисел посвящается данная работа.

Методы теории чисел и алгебры.

Было показано, что при взятие k-ой производной от элемента n – новых простых делителей в знаменателе не появится, степень простых делителей знаменателя ограничены. Мы нашли ограничения на делители решения дифференциальных уравнений первого порядка в зависимости от исходных данных.Мы нашли несколько классов эквивалентных уравнений. В частности, мы показали, что решения всех дифференциальных уравнений первого порядка и уравнений логарифмической производной совпадают.

Исследовади методы работы с арифметической производной над полями частных факториальных колец и применению этих методов для решения задач в теории чисел. Дальнейшее изучение уравнений с арифметической производной и их применение для решения открытых проблем.

Список литературы:

1. REMARKS ON AN ARITHMETIC DERIVATIVE, March 21,196

2.

3. Journal of Integer Sequences, Vol. 6 (2003), Vol. 16 (2013), Vol. 15 (2012).Полные ссылки в работе.

Конечные топологические поля

«Математика»

Дьяконов Александр Владимирович, Айвазян Аршак Владимирович (научный руководитель, Студент СПбГУ), место выполнения работы: дома

Главной целью было дать классификацию конечным топологическим полям. И наш основной результат : топология конечного топологического поля тривиальна. Этот факт по существу уже покрыт теоремой : топология топологического поля либо анти-дискретна, либо вполне регулярна (из первой теоремы для конечного пространства следует дискрестность)

Из основных методов всей работы можно выделить использование изоморфности категорий. Благодаря этой идее в работе и строилось доказательство основной теоремы о классификации топологических полей.

Была успешно найдена классификация конечных топологических полей, в результате которой все конечные поля имеют лишь два вида топологий: дискретную и антидискретную. Также из важных результатов было получено соответствие конечных топологических полей и конечных предупорядоченных полей.

Очевидное общение — классификация конечных топологических колец (или хороших классов колец). Но в соответствии с исходной мотивацией к задаче это исследование полностью завершено завершено. Мы используем его как трамплин для погружения в теорию топологических полей. Вот один интересный открытый вопрос:(А. В. Архангельский). Существует ли счетное топологическое поле без нетривиальных сходящихся последовательностей?

Список литературы:

1. Виро О. Я., Иванов О. А., Нецветаев Н. Ю., Харламов В. М. "Элементарная топология"
2. Wieslaw W. "Topological field"

Обобщение Алгоритма Чена—Хана на порёберные развёртки из квадратов

«Математика»

Ващенков Алексей Максимович, Золотов Борис Алексеевич (научный руководитель, Преподаватель ЛНМО), место выполнения работы: в школе

Два китайских учёных Jindong Chen и Yijie Han исследовали развёртки из треугольников и разработали одноимённый алгоритм для поиска кратчайших путей от заданной вершины до остальных за квадратное количество времени и за линейное количество памяти. В своей же работе я обобщал этот алгоритм на случай квадратов, а также исследовал его свойства и время работы. В процессе исследования я пользовался знаниями из теоретической информатики для анализа вычислительной сложности алгоритмов, алгебры, геометрии и вычислительной геометрии, но в основном я использовал определения из вычислительной геометрии.Основной задачей было обобщить алгоритм Чена-Хана на квадраты и впоследствии на четырёхугольники.

В работе использовались базовые техники теоретической информатики для анализа сложности алгоритмов.Также мной были активно использованы понятия, важнейшие при исследовании развёрток и многогранников: edge-to-edge - термин для обозначения развёртки, где каждый квадрат прилегает к каждому по рёбрам (порёберная развёртка)One-angle-one-split - лемма для увеличения эффективности алгоритма Чена-Хана, чтобы не хранить не кратчайшие пути.

Доказано утверждение, позволяющее упростить работу алгоритма Чена-Хана для квадратов, убирая заведомо не кратчайшие пути.Было доказано свойство, что точки, лежащие на кратчайшем пути, образуют прямую линию на развёртке и их координаты рациональныТакже была дана оценка на количество пересечений кратчайшим путём квадрата в edge-to-edge развёртке

По итогам данной работы алгоритм Чена—Хана для развёрток из квадратов может быть реализован, что позволит классифицировать все развёртки из них.

Список литературы:

1. А. Д. Александров, Выпуклые многогранники. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke. 2007.
3. Shortest Paths on a Polyhedron, Jindong Chen and Yijie Han