



БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС 2021

Санкт-Петербург, 3-4 февраля 2021 года

О задаче А.И. Мальцева. Новые классы финитно отделимых конечнопорожденных коммутативных колец.

«Математика»

Качабекоев Эльхан Маисович, Станислав Исакович Кублановский (научный руководитель, Доктор физ.-мат. наук),
место выполнения работы: дома

Задача описания финитно отделимых колец была сформулирована академиком А.И. Мальцевым в работе 1958 г. в связи с разного рода приложениями для решения алгоритмических проблем. Как показывают исследования последнего времени, описание финитно отделимых конечно порожденных коммутативных колец сводится к описанию колец простой характеристики, являющихся целыми расширениями любого своего бесконечного моногенного подкольца. Среди подобных колец важную роль играют квадратичные расширения моногенных колец. Одной из открытых проблем в этой тематике была проблема описания финитно отделимых квадратичных расширений, которая была решена в предыдущей работе. В настоящей же представлено расширение классов финитно отделимых конечнопорожденных коммутативных колец.

Для получения результата и его приложений автор применил критерии финитной отделимости колец из последней работ С.Кублановского (2019), а также теоремы А.Мальцева (1958)(об алгоритмической разрешимости проблемы вхождения для финитно отделимых колец) и теоремы М. Orzech, L. Ribes (1970) (о финитной аппроксимируемости конечнопорожденных коммутативных колец)

Теорема 1. Кольцо $Z_2\langle a, b \mid a^2 + g(b) = 0 \rangle$, где $g(x)$ — многочлен без свободного члена из кольца многочленов $Z_2[x]$, является финитно отделимым тогда и только тогда, когда $\phi(x)$ — ненулевой многочлен, в состав которого входит одночлен нечетной степени. Теорема 2. Кольцо $Z_2\langle a, b \mid a^2 + ab + g(b) = 0 \rangle$, где $g(x)$ — многочлен без свободного члена из кольца многочленов $Z_2[x]$, будет финитно отделимым тогда и только тогда, когда степень $g(x)$ больше 1. Найдены новые определяющие соотношения, задающие финитно отделимые кольца.

В финитно отделимых конечно-определенных системах алгоритмически разрешима проблема вхождения в подсистему. Одним из приложений является возможность алгоритмического решения проблемы вхождения элемента в подкольцо для финитно отделимых колец из теорем 1 и 2. А это нетривиальная диофантова задача в кольце многочленов с целыми коэффициентами. Развитием темы является обобщение теорем на случай характеристики большей 2