



# БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС 2021

Санкт-Петербург, 3-4 февраля 2021 года

## Коммутаторные длины орбит свободной группы и их квадратов

«Математика»

*Мужосеев Лев Андреевич, Сергей Олегович Иванов (научный руководитель, Кандидат наук), место выполнения работы: в школе*

Коммутант группы  $G$  - это подгруппа  $[G, G]$ , состоящая из произведений коммутаторов  $[g_1, h_1][g_2, h_2] \dots [g_n, h_n]$ . Коммутаторной длиной  $cl(g)$  элемента  $g \in [G, G]$  называется наименьшее число коммутаторов, необходимое для представления этого элемента в виде их произведения. Если  $\phi: G \rightarrow G$  - автоморфизм, то  $cl(g) = cl(\phi(g))$  для любого  $g \in [G, G]$ . Интересным результатом о коммутаторных длинах свободной группы является теорема Харламповича и Мясникова, которая может быть переформулирована следующим образом: существует последовательность слов, что последовательность их коммутаторных длин стремится к бесконечности, но последовательность коммутаторных длин квадратов ограничена. Однако найти такую последовательность не удаётся. Более того, не удаётся явно найти даже элемент  $w \in [F, F]$  для которого  $cl(w^2) < cl(w)$ . Одна из проблем, возникающих при поиске такого элемента, заключается в том, что число элементов длины  $\leq n$  в группе  $F$  растёт очень быстро. Однако орбит элементов коммутанта гораздо меньше. Данная работа посвящена разработке и реализации алгоритма, который выбирает по одному элементу из каждой орбиты  $F$  лежащей в  $[F, F]$ , который мы называем словом Уайтхеда, и вычисляет коммутаторные длины этих элементов и их квадратов.

В работе использовались следующие методы: алгоритм Уайтхеда, основанный на "лемме об устранении пика", алгоритм Duvval, алгоритм, изложенный в статье Д. Фиалковского.

Основным результатом является построение таблиц коммутаторных длин и коммутаторных длин квадратов орбит свободной группы с двумя образующими, имеющих носителя, длины  $\leq 16$ . В качестве следствий мы получили несколько интересных теорем, формулировки которых не помещаются в это поле.

В данной работе был реализован алгоритм, с помощью которого, были вычислены коммутаторные длины, коммутаторные длины квадратов орбит свободной группы, имеющих представителей, длины  $\leq n$ , где  $n$  было выбрано  $= 16$ . Проведя вычисления на более мощных серверах, мы планируем составить более объемную базу, которая потенциально может быть использована для оптимизации алгоритма, описанного в статье Фиалковского, и для нахождения слова  $w$ , что  $cl(w^2) < cl(w)$ .