



Ориентированные графы с двумерным путевым комплексом

«Математика»

Бухаров Марк Алексеевич, Фарафонов Егор Александрович, Иванов Сергей Олегович (научный руководитель, Кандидат ф.-м. наук), место выполнения работы: в школе

Идея гомологий различных математических объектов встречается во многих областях современной математики. В частности, гомологии симплициальных комплексов играют большую роль как в фундаментальной математике (теория гомотопий), так и в прикладной (топологический анализ данных). Было сделано несколько различных попыток построить теорию гомологий ориентированного графа, которые нельзя было назвать вполне успешными, до того, как филдсевский лауреат Ш. Яу вместе с соавторами А. Григоряном, Ю. Лином и Ю. Мурановым не создали теорию путевых гомологий на основе этого определения, которая тут же начала использоваться в изучении искусственных нейросетей. В статье *Homotopy theory for digraphs* доказано, что если в ориентированном графе G нет подграфа определенного вида, то размерность путевого комплекса $\Omega_{\bullet}(G)$ не превышает двух над любым полем. Однако, эти утверждения не эквивалентны и нами было замечено, что есть множество примеров графов, в которых есть подграфы такого вида, но размерность путевого комплекса всё ещё равна двум над любым полем. Цель данной работы заключается в том, чтобы описать другой широкий класс ориентированных графов, размерность путевого комплекса которых не превышает двух, и привести примеры таких графов.

Построение цепного комплекса, построение путевого комплекса ориентированного графа, исследование свойств ориентированного графа на основе его подграфов.

Пусть G — орграф такой, что для любого его направленного квадрата $[abcd]$ существует дуга $a \rightarrow d$, и не существует дуг $b \rightarrow c$ и $c \rightarrow b$. Кроме того, предположим, что не существует пары различных вершин a, b с дугами в обе стороны. Тогда $\Omega_n(G) = 0$ для любого $n \geq 3$. Приведен пример графа, показывающий необходимость дополнительного условия на квадраты. Также приведен пример применения теоремы для обьсчета путевых гомологий триангуляции поверхности тора.

До того, как был доказан основной результат, для того, чтобы исследовать путевые гомологии ориентированного графа требовалось много времени и вычислительных мощностей. Наша работа позволяет значительно ускорить этот процесс. Чем больше граф, тем больше разница в скорости работы нашего метода и старого. В будущем хотелось бы открыть новые, более сильные теоремы, позволяющие еще быстрее исследовать путевые гомологии ориентированных графов.