Пирамидальное свойство обратных величин

«Математика»

Поплевин Никита Дмитриевич, Нирян Людмила Владимировна (научный руководитель, учитель математики),
место выполнения работы: дома

В работе рассмотрено соотношение, связывающее расстояния в правильном треугольнике: если через центр правильного треугольника провести прямую, пересекающую прямые, содержащие его стороны, то сумма обратных величин каких-то двух расстояний от центра до точек пересечения выбранной прямой с прямыми, содержащими его стороны, будет равна обратной величине оставшегося такого расстояния. Показалось интересным расширить знания по этому вопросу, а именно: узнать, выполняется ли подобное соотношение и для других видов правильных многоугольников. В связи с этим были поставлены следующие цели и задачи: провести предварительную проверку выполнимости сходного соотношения для некоторых других видов правильных многоугольников, а также рассмотреть вопрос о возможности его обобщения на все произвольные правильные многоугольники. Выполнение подобного соотношения и для произвольного правильного многоугольника будет полезно для нахождения расстояний до недоступных точек, поскольку дает возможность находить их как через симметричные отображения выбранного положения прямой, так и просто выбирать «удобные» для замеров ее расположения, что является одним из новых и необходимых шагов в создании искусственного интеллекта, который как раз и будет решать сложные технические и научные задачи.

Сначала вручную были выполнены необходимые построения и замеры. Равенство, сходное по построению с рассматриваемым, практически выполнялось и для других видов правильных многоугольников. «Геогебра» показала, что рассматриваемое равенство действительно выполняется, не завися от выбора положения прямой. Далее, используя сопоставления, анализ, математическое моделирование, было проведено математическое обоснование вновь появившегося факта.

Таким образом, удалось не только доказать, что рассматриваемое свойство прямых, проходящих через центр правильных многоугольников, выполняется и для нескольких следующих их видов, но и обобщить его и для произвольного правильного многоугольника. А именно: равенство для сумм обратных величин рассматриваемых расстояний выполняется и для любого правильного многоугольника. Причем число слагаемых в обеих его частях будет расти пирамидально, поскольку именно так будет добавляться количество рассматриваемых расстояний.

В результате удалось обобщить рассматриваемое свойство прямых, проходящих через центр правильных многоугольников, и для произвольного правильного многоугольника. Очевидно, что выполнение полученного соотношения полезно для нахождения расстояний до недоступных точек, поскольку дает возможность находить их как через симметричные отображения выбранного положения прямой, так и просто выбирать «удобные» для замеров ее расположения.

Диаграммы Вороного высших порядков на различных сетках на плоскости и в пространстве

«Математика»

Орлова Лилиана Тимофеевна, Тлепбергенов Джамбек Джамбекович, Заводов Алексей Александрович (научный руководитель, учитель математики), место выполнения работы: школа имени маршала Чуйкова

Вывести и доказать гипотезы, связанные с диаграммой Вороного. Понять, где можно применять диаграмму Вороного в реальной жизни и решить задачи, связанные с этим. Написать программы для моделирования диаграммы Вороного P - множество из n точек на плоскости. Каждую точку из множества P будем называть сайтом. Сайтом также может являться множество точек. S - ГМТ такое, что расстояние от каждой точки до точки p меньше, чем расстояние от неё до любой другой точки из множества P. P - ячейка Вороного. Диаграмма Вороного – множество сайтов P и ячеек Вороного S.Диаграмма Вороного n-го порядка - диаграмма Вороного, где каждая точка принадлежит ячейкам n ближайших сайтов. Обратная диаграмма Вороного – даны ячейки Вороного, но не дано местонахождение сайтов. Сетка – это совокупность точек на плоскости, которые являются вершинами одинаковых фигур, либо повторяющимся рисунком из фигур. Диаграмма Вороного, построенная на сетке - диаграмма Вороного, где сайтами являются вершины сетки. Вес - параметр сайта, являющиеся числом. Взвешенное расстояние - расстояние между p и любой точкой плоскости умноженное на отношение весов сайтов. Взвешенная диаграмма Вороного - диаграмма Вороного, в которой каждый сайт имеет вес, а расстояние от точки до сайта определяется как взвешенное расстояние.

Использовался язык программирования python.

Вывели и доказали различные гипотезы, связанные со взвешенной диаграммой Вороного, диаграммой Вороного на различных сетках. Доказали, что существуют такие сетки, что дважды примененная к ним диаграмма Вороного, приведёт к первоначальной сетке. В частности, треугольные шестиугольные, прямоугольные, сетки из трапеций и т.д. Нашли алгоритм построения нахождения сайтов на обратной диаграмме Вороного и обосновали его. Написали компьютерную реализацию диаграммы Вороного с разными параметрами.

Планы на будущее:Рассмотреть диаграмму Вороного на многогранниках. Написать программу для распознавания диаграммы Вороного на изображениях. Найти больше примеров применения диаграммы Вороного в жизни на практике.

Описание строения группы обратимых центросимметричных двумерных матриц над кольцом вычетов

«Математика»

Зюбин Константин Сергеевич, Иванова Нина Михайловна (научный руководитель, Учитель математики), место выполнения работы: г. Томск, МАОУ СОШ № 32

В системе шифрования с открытым ключом MMMC1, предложенной С. К. Росошеком, для создания ключей шифрования используются обратимые центросимметричные двумерные матрицы над кольцом вычетов. На школе-конференции по теории групп (2020), посвящённой 85-летию В. А. Белоногова, В. А. Романьковым был поставлен вопрос об описании строения этой группы матриц и нахождении минимального числа её образующих.

Используются стандартные методы теории колец и теории групп, а также двойные числа над кольцом вычетов.

Следующие теоремы дают ответ на вопрос В. А. Романькова Теорема: Пусть n = 2^a p_1^{a_1}...p_m^{a_m} (a>=0, a_i>=1) - разложение натурального числа n. Тогда: Если a=0 , то SGL(Zn) \cong (Z{p_1^{a_1}}* x...xZ{p_m^{a_m}}*)^2 .Если a>=1, тоSGL(Zn) \cong Z{2^a}*xZ{2^{a + 1}}*x(Z{p_1^{a_1}}*x…xZ{p_m^{a_m}}*)^2 .Теорема: Пусть n = 2^ap_1^{a_1}...p_m^{a_m} (a>=0, a_i>=1) - разложение натурального числа n.Тогда минимальное число образующих группы SGL(Zn) равно 2m при a=0, 2m+1 при a=1, 2m+3 при a=2, 2m+4 при a>2.

Дано полное описание группы обратимых центросимметричных матриц. Оно может быть полезно при работе с криптосистемой MMMC1.

О тривиальности производного обратного предела обратной последовательности абелевых групп

«Математика»

Бородинова Екатерина Андреевна, Иванов Сергей Олегович (научный руководитель, Кандидат наук), место выполнения работы: ЧОУ ОиДО ЛНМО

Для обратной последовательности абелевых групп можно определить обратный и производный обратный пределы, формирующие точную последовательность. Будем говорить, что последовательность обладает свойством Миттага-Леффлера, если для любой абелевой группы из обратной последовательности элементы ее фильтрации образами стабилизируются. Известно, что, если все группы A_i не более чем счётны, то свойство Миттага-Леффлера эквивалентно обнулению производного предела. Однако, если не предполагать счётность групп, то существуют обратные последовательности групп, которые не удовлетворяют свойству Миттага-Лефлера, но производный предел которых тривиален. Наша работа посвящена тому, чтобы найти свойство обратной последовательности, которое с одной стороны обобщает свойство Миттага-Леффлера и из которого следует тривиальность производного обратного предела.

Использование теории обратных пределов, теории групп

Сформулированы и доказаны леммы, первая утверждает, что при определенных свойствах обратной последовательности производные обратные пределы последовательности и последовательности пополнений изоморфны, а вторая о том, что тривиальность обратного и производного обратного предела обратной последовательности влечет тривиальность обратного предела обратной последовательности пределов. Сформулирована и доказана основная теорема, решающая поставленную нами задачу. Доказано следствие и взаимосвязь с условием Миттага-Леффлера.

В моей работе описано свойство обратной последовательности, обобщающее свойство Миттага-Леффлера, и при котором производный обратный предел тривиален.

БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС 2022
Санкт-Петербург, 21-26 марта 2022 года

Алгебра Йонеды некоторой специальной диэдральной алгебры

«Математика»

Денисова Александра Денисовна, Семенов Андрей Вячеславович (научный руководитель, Аспирант ПОМИ РАН),
место выполнения работы: в школе

Основным объектом в данном исследовании является одна специальная алгебра диэдрального типа - алгебра некоммутирующих полиномов над полем характеристики 2, задающаяся соотношениями $x^2=0$, $y^2=xy$, $xy=yx$. Эта алгебра представляет собой один из простейших примеров алгебр бесконечного типа представления; они, в частности, относятся к алгебрам ручного, а не дикого типа представления. С этими структурами тесно связана алгебра Йонеды, вычисление которой часто является нетривиальной задачей, и для многих серий алгебр из классификации Эрдманн алгебры Йонеды вычислены явно. Алгебры Йонеды имеют огромное значение в гомологической алгебре - например, они позволяют контролировать строение минимальной бимодульной резольвенты исходной алгебры.В данной работе поставлена задача вычисления алгебры Йонеды простейшей алгебры диэдрального типа R, которая, как было показано, явно строится с помощью порождающих и соотношений.

Гомологическая алгебра.

Определим алгебру полиномов $K<x,y>$ над K с градуировкой $|x|=|y|=1$ и рассмотрим идеал $I=<yx+y^2+xy>$. Определим $A=K<x,y>/I$ и рассмотрим разложение A на прямую сумму пространств A^n, определяющее структуру градуированно-коммутативной алгебры на A: здесь каждое пространство A^n порождено полиномами степени $n>0$ от переменных x, y.Основным результатом работы является теорема, показывающая, что алгебра Йонеды для рассматриваемой алгебры R изоморфна A как градуированная алгебра над K.

В данной работе был получен результат, полностью исчерпывающий исходную постановку задачи: в явном виде была посчитана алгебра Йонеды рассматриваемой алгебры R.В дальнейшем этими же методами могут быть изучены и другие алгебры диэдрального типа.

Гомотопическая классификация конфигурационных пространств компактов в R^n

«Математика»

Грищенко Илья Иванович, Павлюк Елизавета Алексеевна, Айвазьян Аршак Владимирович (научный руководитель, Студент МКН СПбГУ), место выполнения работы: в школе

Пусть X, Y метрические пространства. Через Isom(X, Y) обозначается пространство изометрических вложений из X в Y с компактно-открытой топологией. Тогда конфигурационным пространством Conf(X, Y) называется фактор-пространство Isom(X, Y) по отношению эквивалентности равенство образов. Возникает естественная задача гомотопической классификации пространств Conf(K, R^n) для метрических компактов K.Так при n = 1, Conf(K, R) всегда гомеоморфно R и т.о. стягиваемо. В этой работе мы решаем задачу при n = 2, 3, 4.

1) Мы показываем, что Conf(K, R^n) гомотопически эквивалентно O(n)/G(K), где G(K) группа симметрий компакта K.2) Мы сводим изучение факторов O(n) к изучению соответствующих факторов SO(n).Так, исходная задача сводится к задаче гомотопической классификации многообразий SO(n)/G, которую мы решаем при n = 2, 3, 4 пользуясь теорией групп Ли и специальными изоморфизмами Spin(3) ~= S^3 (единичные кватернионы), Spin(4) ~= S^3 x S^3 / {1, -1}.

Теорема (о топологической и гомотопической классификации SO(2)/G).Одномерные: S^1Нульмерные: 1Теорема (о топологической и гомотопической классификации SO(3)/G).Трехмерные: A_n, D_n, E_6, E_7, E_8Двумерные: RP^2, S^2Нульмерные: 1где A_n это линзовое пространство(2n, 1), а остальные это сферические многообразия с соответствующими фундаментальными группами (бинарная группа диэдра, тетраэдра, октаэдра, икосаэдра)

Пользуясь специальным изоморфизмом Spin(4) = (S3 ×S3)/1,−1 мы планируем полностью решить сверхзадачу при n = 4.

Матричные рекуррентные уравнения 2-го порядка

«Математика»

Капустина Мария Сергеевна, Третьяков Дмитрий Вадимович (научный руководитель, кандидат наук), место выполнения работы: ГБОУ ДО РК «Малая академия наук «Искатель»

Хорошо известна значительная роль, которую играет теория рекуррентных уравнений в математике и многочисленных её приложениях. В связи с этим большой научный интерес представляет изучение однородных рекуррентных уравнений с вещественными коэффициентами на множестве матриц второго порядка и нахождение общих и частных решений этих уравнений. Постановка такой задачи является новой. Рекуррентные матричные уравнения первого порядка являются более простым частным случаем указанных уравнений. В работе даны определения рекуррентного матричного уравнения, характеристического матричного уравнения, общего и частного решений рассматриваемого уравнения.

Исследования данной проблемы было проведено с помощью известных понятий и теорем классической теории рекуррентных уравнений и теории матриц. Автором разработаны методы исследования характеристического матричного уравнения, а, также, методы нахождения общих и частных решений рекуррентных матричных уравнений с действительными коэффициентами.

Основные результаты. 1 Обоснован метод решения рекуррентных матричных уравнений второго порядка с действительными коэффициентами. 2 В рамках исследования предложен метод исследования характеристического уравнения и нахождения всех его решений. 3 Установлено, что, в отличии от скалярных рекуррентных уравнений, матричные рекуррентные уравнения с начальными условиями могут быть неразрешимы. 4 Приведены примеры разрешимых и неразрешимых рекуррентных матричных уравнений. Поставленная задача полностью выполнена автором.

Разработанные методы можно использовать при решении однородных и неоднородных рекуррентных матричных уравнений произвольного порядка. Возможные приложения : матричные уравнения, матричные модели в биологии.

Монстры среди графов

«Математика»

Наркевич Григорий Эдуардович, Очеретняя Ольга Павловна (научный руководитель, Учитель математики), место выполнения работы: В школе

Цель задачи Исследование локально искаженных графов и графов с заданными H-структурами. Актуальность: 1.Для поиска сходства между химическими соединениями граф, отвечающий некоторому структурному соединению, сопоставляется с графами из библиотеки химических веществ. 2.Проблема поиска частых шаблонов в базах данных является проблемой обнаружения подграфов. 3.Локальную структуру сетей можно измерить по частотному распределению графлетов. При этом сети ББВ с высокой степенью достоверности имеют локальную структуру геометрических случайных графов. 4.Проблемы изоморфизма подграфов используется в моделировании социальных сетей, проектировании электронных схем, искусственном интеллекте. Термины: H-степень вершины, порядок вершины и ребра, счетные и локально счетные графы, порожденный подграф, H-монстр, H-стабильный граф, локально искаженный граф. Постановка задачи: 1.Доказательства тождеств и формулировка следствий. 2.Создание рекурсивных алгоритмов построения бесконечных серий графов. 3.Тривиальность группы автоморфизмов локально искаженного графа и графа-монстра. 4.Определение H-степеней вершин графа. Характеристика стабильных графов. Опровержение существования K_2-монстров. Локальная искаженность K_3-монстров. 5.Примеры бесконечных монстров, их счетные свойства.

В исследовании использованы основные методы комбинаторики и теории графов, а также, элементы теории множеств.

В нашем исследовании мы доказали ряд тождеств об H-степенях вершин графа, утверждения о группах автоморфизмов графов с особыми структурами; получили ограничение на порядок стабильного локально искажённого графа; привели рекурсивные алгоритмы построения бесконечных серии графов с особыми структурами; определили некоторые H-степени вершин; охарактеризовали некоторые стабильные графы; рассмотрели примеры бесконечных монстров и их счетные свойства. Также были приведены примеры бесконечных серий и графов с особыми структурами.

В работе была исследована вся исходная постановка задачи, получены рекурсивные алгоритмы построения бесконечных серий рассматриваемых графов, доказан ряд утверждений об H-степенях вершин и группах автоморфизмов. При дальнейшем развитии задачи можно определить, для какого порядка графа существуют конечные или бесконечные H-монстры. Применение данной задачи можно найти в областях химии, биологии, анализа данных, моделирования социальных сетей.

Мозаика из элементов с симметрией седьмого порядка

«Математика»

Кулигина Полина Александровна, Печегина Наталия Александровна (научный руководитель, Учитель математики), место выполнения работы: дома

Со времен античности и по сей день построение правильного семиугольника с помощью только циркуля и линейки является неразрешимой проблемой. В природе, искусстве и строительстве семикратная симметрия встречается крайне редко. Таким образом, существует большой потенциал для будущего обобщения и расширения показанных возможностей использования правильных семиугольников для необычных узоров, паркета, плитки и мозаики. Изучение элементов симметрии, в частности правильного семиугольника, и асимметрии позволит в будущем предсказывать существование новых материалов, например, как графен.Целью работы являлось исследование возможности построения мозаики из правильных семиугольников по аналогии плоской пятиугольной мозаики Пенроуза. Основные задачи исследовательской работы:1) Изучить геометрию и зависимость между частями правильного семиугольника.2) Найти формулы, которые помогут рассчитать конструкцию построения для правильных семиугольников в комплексных числах.3) Определить возможность замощения плоскости правильными семиугольниками.4) Построить мозаику из правильных семиугольников и звезд.

Построение правильного семиугольника возможно с помощью рычажной системы, состоящей из двух циркулей, которые соединены подвижными рычагами, образующими параллелепипед. Это дало возможность с помощью комплексных чисел исследовать конструкцию мозаики из правильных семиугольников и звездообразных семиугольников в комплексной плоскости. А также исследования проводились с помощью графических построений на компьютере с помощью программы GeoGebra.

По результатам исследований определена невозможность замощения плоскости правильными семиугольниками без перекрытия и зазоров между семиугольниками. Если удалить перекрытия, то замощение плоскости получается без нарушения симметрии, но с неправильными семиугольниками и промежутками в форме ромбов.С помощью компьютерной программы GeoGebra исследована возможность построения мозаики из правильных семиугольников и семиугольных звезд. Представлены два варианта мозаики.

Невозможно создать полностью периодические мозаики с симметрией седьмого порядка. Однако возможно построение мозаики из правильных семиугольников и семиугольных звезд по аналогии плоской пятиугольной мозаикой Пенроуза. Таким образом, существует большой потенциал для будущего обобщения и расширения показанных возможностей использования правильных семиугольников и элементов с симметрией седьмого порядка для необычных узоров, паркета, мозаики и т.д.

Факторизация триномов

«Математика»

Майоров Степан Сергеевич, Алякин Владимир Алексеевия (научный руководитель, Кандидат наук, доцент), место выполнения работы: в школе

Темой проекта является факторизация триномов. Триномами называются многочлены специального вида, а именно, приведенные трехчлены степени не меньше двух со свободным членом 1, т.е. x^p+ax^q+1. Второй коэффициент тринома может быть равен любому вещественному числу. Особый интерес представляют триномы с целыми коэффициентами, а среди них — триномы с вторым нулевым коэффициентом; тогда трином является биномом — двучленом степени не меньше двух с коэффициентами, равными единице. Проблема факторизации (разложения на множители) натуральных чисел и многочленов является одной из важнейших в теории чисел, поскольку факторизуемость применяется в теории информации и криптографии. Проблема факторизации триномов особенно интересна ввиду того, что триномы — это наиболее простые многочлены. Основной целью работы является исследование круга вопросов, связанных с разложением триномов на произвольное число сомножителей- триномов.

Для доказательства теорем и различных фактов были использованы общеизвестные метод рассуждения от противного, метод математической индукции и метод оценок.

Доказано,что для любого k существует трином,раскладывающийся в произведение k триномов.Найден общий вид триномов 4степени,раскладывающийся в произведение двух триномов с целыми коэффициентами.Доказано,что существует только два факторизуемых тринома 5степени.Это триномы:x^5+x+1 и x^5+x^4+1.Доказано,что наименьшая степень тринома,раскладывающегося в произведение как двух,так и трех триномов,равна 6.Доказано,что вида x^n+1 можно разложить в произведение двух триномов тогда и только тогда,когда n делится на 4 или n делится на 3.

Просмотрев исследование и работы предыдущий лет, я не не смог найти работы на подобную тему, поэтому мы можем говорить о новизне темы работы. Сформированы основные пока ещё нерешённые задачи, над которыми нужно работать в первую очередь.(Эти задачи приведены в работе) Основными областями применения данных знаний является теория чисел, информации и криптография.

Замечательные точки треугольника с тремя собственными вершинами геометрии Лобачевского в модели Пуанкаре

«Математика»

Старцев Николай Витальевич, Фролова Марина Витальевна (научный руководитель, Преподаватель математики), место выполнения работы: По зуму. Академическая гимназия им. Д. К. Фаддеева СПбГУ

Найти замечательные точки треугольника с тремя собственными вершинами геометрии Лобачевского в модели Пуанкаре. Термины указаны в работе.

Абстрагирование и моделирование. Абстрагировал утверждение, что через одну точку проходит только одна прямая, что сумма углов меньше 180 градусов. Моделировал треугольник в модели Пуанкаре. Все построения выполнял в GeoGebra.

Пользуясь знаниями о геометрии Лобачевского и построении модели Пуанкаре, мы построили три замечательные точки треугольника модели Пуанкаре.

Дальше планируется построить окружность девяти точек в модели Пуанкаре.

Еще о неравенстве Эрмита-Адамара для MN-выпуклых функций

«Математика»

Калинчук Валерия Валерьевна, Горский Сергей Михайлович (научный руководитель, Преподаватель в АНО ДПО Научн), место выполнения работы: школа

Область исследования: выпуклые функции. Актуальность: интегралы, возникающие при решении производственных и научных задач, как правило, не выражаются через элементарные функции. Для получения результата приходится проводить их оценку. Постановка задачи: 1.Вывести новую оценку интеграла для выбранных MN-выпуклых функций; 2.Обобщить некоторые уточнения неравенства Эрмита-Адамара для выбранных MN-выпуклых функций. Термины: выпуклая функция, неравенство Эрмита-Адамара.

1. Изучение теории по заданной теме. 2. Метод анализа.

В процессе исследования были получены следующие результаты: 1. Приведена и доказана новая оценка для выбранных MN-выпуклых функций; 2. Приведена и доказана лемма для субаддитивных функций; 3. Обобщены неравенства Эль-Фариссi и Шимича для выбранных MN-выпуклых функций.

В результате работы были решены все поставленные задачи: 1. Выведена новая оценка интеграла для выбранных MN-выпуклых функций; 2. Выбраны и обобщены уточнения неравенства Эрмита-Адамара для выбранных MN-выпуклых функций. В качестве возможного пути развития можно рассмотреть получение аналогичных результатов для других типов MN-выпуклых функций. Работа будет актуальна в статистике, выпуклом анализе.

Примеры Ацикличных Алгебр Ли

«Математика»

Артемьев Михаил Артемович, Мукосеев Лев Андреевич, Иванов Сергей Олегович (научный руководитель, Старший научный сотрудник), место выполнения работы: НЦ Лаборатория Непрерывного Математического Образования

Идея гомологий различных математических объектов встречается во многих областях современной математики. Когда рассматриваются гомологии каких-то математических объектов, всегда важной частью теории оказывается исследование ацикличных" объектов, то есть, объектов с тривиальными гомологиями. В случае теории гомологий групп возникает понятие ацикличной группы: группа называется ацикличной, если все её приведённые целочисленные группы гомологий обнуляются. Теория ацикличных групп важна не только в гомологической алгебре, но и в теории гомотопий. С одной стороны, известно, что класс ацикличных групп очень богат. Например, известно, что любая группа вкладывается в ацикличную. С другой стороны, довольно сложно строить примеры конечно порождённых ацикличных групп. Можно без особого труда построить бесконечно порождённую ацикличную группу. Простейшим же примером конечно порождённой ацикличной группы является группа Хигмана. Однако доказательство её ацикличности нетривиально. До настоящего момента не было известно ни одного примера конечно порождённой ацикличной алгебры Ли. Наша работа посвящена построению примеров ацикличных алгебр Ли.

В нашей работе испольуются такие инструменты как HNN-расширения алгебр Ли и амальгамированные произведения алгебр Ли

Основными результатами являются: 1. Приведение примера бесконечнопорожеденной ацикличной алгебры Ли. 2. Приведение примера конечнопорожденной ацикличной алгебры Ли.

В данной работе мы приводим нетривиальный пример конечнопорожденной агебры Ли. В качестве продолжения исследования мы видим возможность получения аналога результата про вложение любой группы в ацикличную на случай алгебр Ли.

Ориентированные графы с двумерным путевым комплексом

«Математика»

Бухаров Марк Алексеевич, Фарафонов Егор Александрович, Иванов Сергей Олегович (научный руководитель, Кандидат ф.-м. наук), место выполнения работы: в школе

Идея гомологий различных математических объектов встречается во многих областях современной математики. В частности, гомологии симплициальных комплексов играют большую роль как в фундаментальной математике (теория гомотопий), так и в прикладной (топологический анализ данных). Было сделано несколько различных попыток построить теорию гомологий ориентированного графа, которые нельзя было назвать вполне успешными, до того, как филдсевский лауреат Ш. Яу вместе с соавторами А. Григоряном, Ю. Линем и Ю. Мурановым не создали теорию путевых гомологий на основе этого определения, которая тут же начала использоваться в изучении искусственных нейросетей. В статье Homotopy theory for digraphsдоказано, что если в ориентированном графе G нет подграфа определенного вида, то размерность путевого комплекса \Omega_\bullet(G) не превышает двух над любым полем. Однако, эти утверждения не эквивалентны и нами было замечено, что есть множество примеров графов, в которых есть подграфы такого вида, но размерность путевого комплекса всё ещё равна двум над любым полем. Цель данной работы заключается в том, чтобы описать другой широкий класс ориентированных графов, размерность путевого комплекса которых не превышает двух, и привести примеры таких графов.

Построение цепного комплекса, построение путевого комплекса ориентированного графа, исследование свойств ориентированного графа на основе его подграфов.

Пусть G — орграф такой, что для любого его направленного квадрата [abcd] существует дуга a -> d, и не существует дуг b -> c и c -> b. Кроме того, предположим, что не существует пары различных вершин a, b с дугами в обе стороны.Тогда \Omega_n(G)=0 для любого n >= 3.Приведен пример графа, показывающий необходимость дополнительного условия на квадраты.Также приведен пример применения теоремы для обсчета путевых гомологий триангуляции поверхности тора.

До того, как был доказан основной результат, для того, чтобы исследовать путевые гомологии ориентированного графа требовалось много времени и вычислительных мощностей. Наша работа позволяет значительно ускорить этот процесс. Чем больше граф, тем больше разница в скорости работы нашего метода и старого.В будущем хотелось бы открыть новые, более сильные теоремы, позволяющие еще быстрее исследовать путевые гомологии ориентированных графов.

Полиномиальные оценки на количество выпуклых многогранников, склеиваемых из правильных 3- и 6-угольников

«Математика»

Дойникова Екатерина Алексеевна, Золотов Борис Алексеевич (научный руководитель, Преподаватель ЛНМО), место выполнения работы: В школе

Цель этой работы – найти оценки на количество порёберных склеек из правильных k-угольников при $k = 3$ и $k = 6$. Склейка — упорядоченная пара из набора многогранников и правила склеивания рёбер. Согласно теореме Александрова о развёртке любая склейка, которая гомеоморфна сфере, и угол в любой точке не превосходит 2π, соответствует некоторому замкнутому многограннику, причём только одному (при этом допускается, что многогранник вырождается в плоский многоугольник, в этом случае поверхность многогранника определяется как есть две копии многоугольника, склеенные по соответствующим точкам границы).Не известно ни одного алгоритма, восстанавливающего многогранник по склейке. Подсчёт числа склеек также довольно труден, так как это число может быть экспоненциальным даже для одного многоугольника. Эти задачи решены только для нескольких конкретных случаев. Случай, когда все склеиваемые многогранники – правильные k-угольники и все склейки порёберные, полностью изучен для $k \geq 7$ и для $k = 5$. Для $k = 6$ найдены некоторые многогранники, включая все возможные дважды накрытые многоугольники, которые могут быть склеены, а для $k = 4$ найдены оценки на количество склеек.

В данной работе была введена новая система координат на треугольной сетке и изучены её свойства. Также было рассмотрено изображение развертки на сетке и сведён перебор развёрток к перебору рёбер, это позволило дать верхнюю оценку. Для нахождения нижней оценки была построена серия многогранников, которые можно склеить из данного количества правильных 3- или 6-угольников.

Основной результат — верхняя и нижняя оценки на количество склеек, причём обе оценки оказались полиномиальными по n, где n —максимальное число задействованных правильных 3/6-угольников. Верхняя оценка получена при помощи перебора возможных изображений склейки на сетке, нижняя оценка — построением серии многогранников, которые гарантированно можно склеить.Также была написана программа, перебирающая всевозможные наборы векторов и проверяющая, можно ли составить из них склейку. С её помощью найдены интересные примеры склеек.

В данной работе были получены оценки на количество многогранников, склеиваемых из правильных 3/6- угольников в зависимости от максимального числа задействованных 3/6-угольников. Тем самым было завершено исследование по поиску оценок на количество порёберных склеек из правильных k-угольников. Основной путь развития задачи – нахождение более строгих оценок, а так же классификация всех возможных многогранников, получаемых из правильных k-угольников.

О длине наименьшего нетривиального элемента в нижнем центральном ряде

«Математика»

Пупышев Матвей Дмитриевич, Пакульневич Константин Михайлович, Романовский Владислав Романович (научный руководитель, аспирант МатМеха СПБГУ), место выполнения работы: в школе

Работа посвящена изучению длины минимальных нетривиальных слов в γ_n(F(a,b)) для малых n. Здесь γ_n(F(a,b)) это n-ый элемент нижнего центрального ряда свободной группы на двух образующих. γ_n(G) определяется рекурсивно. γ_1= G, γ_n+1=[γ_n,G]. Нижний центральный ряд — одно из основных понятий теории групп и всякий открытый вопрос, касающийся этого понятия, интересен сам по себе.

Основные вычисления произведены с помощью алгоритма, определяющего максимальный номер γ_n,в котором лежит заданное слово. Алгоритм основан на вложении Магнуса, подробное описание алгоритма и вложения приведено в основной части работ. Алгоритм позволил дать оценку для конечного числа членов ряда.

Основные результаты вычислений представлены в таблице раздела 2.3.(см. файл). Мы построили алгоритм, который определяет по слову наибольшее n такое, что слово лежит в γ_n. Таким образом, наша программа находит все γ_j , в которых это слово лежит. С помощью алгоритма и программы, мы смогли установить определенную закономерность между длиной слова и γ_n. Кроме того, явно выписан элемент из γ_5(F(a,b)), длина которого равна 14. Так же, одним из основных результатов является то, что для любого w из γ_6 длина w превосходит 17.

Полученную в статье оценку можно применить для упрощенного подсчета количества слов из γ_n. Данную работу можно развить, если оптимизировать алгоритм поиска оптимальных слов, чтобы получить большую базу значений. В последствии, полученная в работе оценка может быть аппроксимирована.

Классификация сингулярных теорий гомологий

«Математика»

Максимович Роман Алексеевич, Айвазьян Аршак Владимирович (научный руководитель, Студент СПбГУ МКН), место выполнения работы: дома

Рассматриваются функторы симплициальных гомологий симплициального комплекса и сингулярных гомологий топологического пространства. Классически они определяются на языке комбинаторики, и эти определения не вполне мотивированы и не всегда удобны для вычислений и проверки утверждений. Цель этого проекта - попытаться придумать более интуитивное и более общее понятие симплициальных и, преимущественно, сингулярных гомологий. Более геометрически ясное определение теоретически способно привести к новым результатам во всей области теории гомологий.

В качестве основного метода в работе выступает принцип математической логики и формализация интуитивных понятий. В процессе создания работы использовались онлайн-доски Miro и система вёрстки LaTeX.

В работе представлены широкие обобщения симплициальных и сингулярных теорий гомологий, был найден способ индуцировать группы гомологий более широким и разнообразным классом объектов, нежели стандартные симплексы, то есть многомерные треугольники.

Построенные обобщения позволяют посмотреть на теорию гомологий с немного другой стороны, и, возможно, открыть некоторые неизвестные ранее гомологические инварианты топологических пространств, а так же, пересмотреть и упростить уже достигнутые результаты.

θ-двойственность рациональных струнных зацеплений

«Математика»

Бурлаков Пётр Андреевич, Аксёнова Дарья Дмитриевна (научный руководитель, Аспирант ПОМИ РАН), место выполнения работы: в школе

В этой работе изучаются вопросы класификации двуниточных тенглов. Во второй половине XX века тенглы как часть теории узлов активно изучались. Одним из важнейших результатов является теорема Конвея о классификации рациональных тенглов. Целью нашей работы является расширение классификации тенглов. С помощью θ-автоморфизма мы описыванием алгоритм построения тенглов, которые называем θ-двойственными к рациональным.

В работе были применены методы геометрической топологии, индукция, комбинаторные методы.

В данной работе нам удалось выявить закономерность в построении рациональных струнных зацеплений с помощью алгоритма построения рациональных тенглов. Кроме того, нам удалось классифицировать образы тенглов под действием автоморфизма, задающиеся тремя и менее количествами переплетений.

В перспективе планируется выявить полную классификацию образов рациональных тенглов, под действием автоморфизма.

Классификация гомотопических инвариантов CW-комплексов

«Математика»

Красильников Александр Валерьевич, Айвазьян Аршак Владимирович (научный руководитель, Студент СПбГУ МКН), место выполнения работы: в школе

Моя задача состоит в классификации гомотопических инвариантов CW-комплексов. CW-комплекс, он же клеточный комплекс, является одним из основных объектов теории гомотопий и теории гомологий, одной из самых быстрорастущих областей математики. Сам по себе он является очень хорошим топологическим пространством, подразумевающим разбиение на клетки - шары разных размерностей. В работе также присутствуют определения гомотопической эквивалентности, гомотопических групп, башен Уайтхеда, а также эквивалентности по гомотопической группе (и группам) и стандартного CW-комплекса, построенного по данной группе.Эквивалентность по гомотопическим группам заключается в существовании непрерывного отображения, которое индуцирует изоморфизмы всех данных гомотопических групп. В работе изучаются такие эквивалентности, являющиеся гомотопическими инвариантами.

В работе были использованы такие структуры, как башни Уайтхеда (есть в использованной литературе).

В работе доказано, что эквивалентность по гомотопической группе на CW-комплексах совпадает с изоморфностью соответсвующей гомотопической группы у топологических пространств.Пока был рассмотрен случай эквивалентности по гомотопическим группам только для одной группы, но, имея полученные данным исследованием знания, в дальнейшем планируется изучать эквивалентности по гомотопическим группам для многих групп сразу.

В заключении хотелось бы отметить, что в работе был получен существенный результат, который будет улучшаться. Одним из путей развития задачи является исследование аналогично построенной эквивалентности по группам гомологий. Это исследование будет полезно в общей топологии, ведь оно позволяет нам, зная основные качества пространств, получать морфизмы (непрерывные отображения) между ними, наделенные хорошими свойствами.

Исследование геодезических линий на поверхности обобщённого тора

«Математика»

Травин Александр Юрьевич, Casey Blacker Alexandr (научный руководитель, EIMI International Postdoc), место выполнения работы: ЛНМО

В данной научной работе исследуется обобщённый тор, то есть поверхность полученная вращением не круга, а произвольной выпуклой фигуры Ярким примером такой фигуры служит обычный тор, или эллиптический тор (elliptic torus) В данной работе исследуются геодезические линии на поверхности обобщённого тора, даётся их полная классификация и исследуются их свойства.

Для классификации геодезических линий они были разбиты на классы эквивалентности, каждый из которых был в последствии отдельно исследован.

Проведена полная классификация геодезических линий обобщённого тора и доказан ряд вспомогательных теорем, например теорема о том, что любая геодезическая линия внутреннего кольца тора пересекает его большое кольцо.

Эту научную работу можно обобщить, исследовав поверхности вращения, образованные произвольными гладкими кривыми

Диаграмма Рыбов. Построение с помощью алгоритма Divide and Conquer

«Математика»

Глаголев Иван Алексеевич, Борис Алексеевич Золотов (научный руководитель, Аспирант СПбГУ), место выполнения работы: Дома

Представим задачу, пусть дан некий город N, в котором расположены N различных магазинов. Мы знаем, что жители города люди ленивые, поэтому больше 10 минут до магазина они не ходят, а также, мы знаем, что уровень магазинов в городе разнится, а именно, чем выше приоритет магазина, тем более он престижный, к примеру если до 2 разных магазинов жителю нужно идти меньше 10 минут, то он выберет тот магазин, номер которого меньше. Учитывая эти факты, требуется построить диаграмму доступности этих магазинов. Дадим формальное определение получившейся диаграммы. Пусть дан набор, состоящий из N пар вида (координаты точки, ее номер), а так же, дан ε — радиус окружностей. Тогда будем строить по этим точкам диаграмму следующим образом: вокруг каждой точки строится окружность радиуса ε, затем все пересекающиеся окружности сравниваются по приоритету и в соответствии со сравнением накладываются друг на друга. Диаграмма представляет из себя плоский граф, в котором вершины это точки пересечения окружностей, а ребра — это дуги окружностей. Мы хотим научится строить ее как можно быстрее, а именно за S log S, где S — количество вершин графа.

Суть построения с помощью Divide and Conquer состоит в том, что получая на вход N точек, мы делим их на 2 равные части, после чего рекурсивным вызовом строим картинку для обеих частей. Затем, задача алгоритма состоит в том, что бы объединить 2 получившиеся части, создав так называемую цепь между ними. После того, как алгоритм построил цепь, мы получаем итоговое построение для N заданных точек, что нам и требовалось сделать.

Основным результатом работы является алгоритм построения диаграммы Рыбов, являющийся реализацией идеи алгоритма «Divide and Conquer», работающий за время O(Slogn+nlog^2 n).

Диаграмма Рыбов может оказаться крайне полезной моделью для различного рода планирования. К примеру, как было описано во вступлении, диаграмма Рыбов может позволить урбанистам строить карты, которые будут показывать доступность тех или иных заведений, общественных мест и т.п.

БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС 2022
Санкт-Петербург, 21-26 марта 2022 года

Новые факты в теории гарантированного поиска

«Математика»

Гришмановский Данила Андреевич, Крылов Валерий Валентинович (научный руководитель, Кандидат педагогических наук), место выполнения работы: школа, дом

Одна из главных задач теории гарантированного поиска (ТГП) формулируется следующим образом. На конечном связном графе G располагаются преследователи, которые должны гарантированно поймать так называемого убегающего, информация о скорости и месторасположении которого отсутствует. Все передвигаются по рёбрам графа непрерывно. Нам нужно найти минимальное число таких преследователей на этом графе. Число, описывающее минимальное количество преследователей, необходимых для поимки убегающего, называется рёберно поисковым числом графа G. Впервые, задача нахождения поискового числа графа была поставлена и изучена в работах Т. Д. Парсонса и Н. Н. Петрова всего около 40 лет назад. К сожалению, на данный момент очень мало содержательных исследований по ТГП. Рассмотрим регулярное топологическое пространствоX. Поиском на X называется совокупность S = S(X) непрерывных отображений X. Исследованной поиском S в момент времени t областью пространства X называется его подмножество S(t, X) = \{ x \in X | g \in C([0, t], X), g(t) = x \Rightarrow \exists 0 \leqslant t_0 \leqslant t \colon g(t_0) \in F(t_0) \}.\end{equation*}

Для разрешения главных вопросов ТГП я заложил основы общей теории гарантированного поиска (ОТГП). В доказательствах теорем ОТГП я использовал классические методы топологии и математического анализа. Также я предлагаю новый подход к построению конечной теории гарантированного поиска (КТГП) (на графах). Практически с нуля мною была построена система обозначений, а также конструкции и определения.

Классификация всех деревьев относительно $(1, 1)$-поискового числа, полностью изучено взаиморасположение точек старта и финиша в дереве, построено семейство минимальных деревьев (которое участвует в классификации всех графов относительно $(1, 1)$-поискового числа). Сформулирована гипотеза об (m, k)-поисковом числе из которой следует эквивалентность условий монотонности и связности при рассмотрении поисковых чисел произвольного графа.

Подводя итог я хотел бы сказать, что поисковые числа деревьев теперь изучены достаточно хорошо, чтобы сосредоточиться на изучении поисковых чисел графов с циклами. Я считаю, что сперва нужно ответить на поставленные мною гипотезы. Также интересным было бы изучение поисков, где преследователи видят убегающего.

Обобщённые локсодромические спирали на поверхностях постоянной гауссовой кривизны

«Математика»

Цыганенко Павел Юрьевич, Блэкер Кейси Александр (научный руководитель, Постдок EIMI в СПбГУ), место выполнения работы: в школе

Основная цель данной работы состоит в изучении локсодромических спиралей на поверхностях нулевой, положительной и отрицательной гауссовых кривизн. Интерес к обобщённым локсодромам обуславливается простотою их определения. В частности, логарифмическая спираль встречается в природе: некоторые раковины моллюсков, циклоны и галактики близки по форме к ней, а локсодрома на сфере используется в навигации. Однако больше применения данная работа может найти в области дифференциальной геометрии. В работе используются такие определения как: логарифмическая спираль, локсодрома, обобщённая локсодрома, гауссова кривизна, геодезическая кривизна, псевдосфера, параметризация. Главной задачей является вычисление геодезической кривизны локсодромических спиралей и сравнение их поведений для случаев нулевой, положительной и отрицательной гауссовой кривизны.

Основные методы вычислений, такие как формула Лиувилля, взяты из книги, представленной в списке литературы. Автор пользуется известными параметризациями некоторых кривых и поверхностей. Так же, активно используются свойства дифференцирования. Единожды фигурирует решение дифференциального уравнения. Для оформления работы использовалась система LaTeX, а часть иллюстраций к ней создавалась при помощи программы gnuplot.

Была посчитана геодезическая кривизна локсодром для всех трёх случаев гауссовой кривизны (нулевой, положительной и отрицательной). Дополнительно была вычислена геодезическая кривизна классической локсодромы на псевдосфере. На основании полученных результатов мы можем вычислить геодезическую кривизну обобщённой локсодромы для поверхности любой вещественной гауссовой кривизны. Это даёт нам основания построить визуализацию, что и было сделано.

Поставленная задача была выполнена. Для каждого из рассматриваемых случаев нам удалось посчитать геодезическую кривизну, на основании чего, было создано трёхмерное представление зависимости геодезической кривизны от гауссовой кривизны поверхности и расстоянии до центра локсодромы. Данную работу можно продолжить, рассмотрев поверхности непостоянной гауссовой кривизны.

Алгоритм sweep-line для диаграмм Рыбов

«Математика»

Ващенков Алексей Максимович, Борис Алексеевич Золотов (научный руководитель, Аспирант СПбГУ), место выполнения работы: В школе и дома

В данной работе была рассмотрена конструкция «диаграмма Рыбов» и идея обобщения алгоритма «sweep-line» на случай окрестностей. Были доказаны вспомогательные теоремы о свойствах рассматриваемых диаграмм и асимптотики алгоритмов. Основным результатом работы является алгоритм построения диаграммы Рыбов, являющийся реализацией идеи алгоритма «sweep-line», работающий за время O(n log n).

В работе использовались базовые техники теоретической информатики для оценки сложности алгоритмов и методы вычислительной математики для упрощения расчётов программ. Также, был использован метод «sweep-line», известный как «метод заметающей прямой».

Были доказаны теоремы о степени вершины в диаграмме, сохранении связности при удалении любых двух рёбер в диаграмме. Основным результатом работы является алгоритм построения диаграммы Рыбов, являющийся реализацией идеи алгоритма «sweep-line», работающий за время O(n log n).

По итогам данной работы может быть усовершенствовано планирование городских инфраструктур, или работа навигационных систем (нахождение кратчайших маршрутов между пунктами).

БАЛТИЙСКИЙ НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ КОНКУРС 2022
Санкт-Петербург, 21-26 марта 2022 года

Выпуклые функции

«Математика»

Петришина Анна Григорьевна, Дуль Екатерина Николаевна (научный руководитель, Студент), место выполнения работы: Дома

В работе исследовались выпуклые функции специального вида.Пусть p является действительным числом. Функцию f : I \rightarrow]0,+1[назовём p-выпуклой если для любых различных x, y \in I и любого \lambda \in]0, 1[, выполняется следующее неравенство: f(\lambda x+(1-\lambda)y)< H_{\lambda, p}(f(x),f(y))Назовём h-выпуклой если для любых различных x, y \in I и любого \lambda \in]0, 1[f(\lambda x+(1-\lambda)y)< L_{\lambda, h}(f(x),f(y))1. Рассмотрите следующее утверждение (S): "Если для a, b, c, d \in I выполняется a + b = c + d и f(a) + f(b) = f(c) + f(d), то a = c or a = d."2. Опишите такие функции h, что утверждение (S) верно3. Разработайте метод решения уравнений при помощи свойств выпуклости. 4. Найдите набольшее p \in R такое, что для любых различных положительных действительных чисел x и y и любого \lambda \in]0, 1[, выполняются неравенства.5. Пусть p_0 — действительное число. Предложите способ определения функциий h :]0, 1[\rightarrow [0,+\infty[таких, что следующее неравенство верно для любых различных положительных действительных чисел x и y и любого \lambda \in]0, 1[и любого p \leq p_0, но неверно для p > p_0:6. Найдите утверждения, схожие с Неравенством Йенсена для квазивыпуклых и квазивогнутых функций.

Неравенство Караматы, неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом (стандартный и взвешенный вид)

Были рассмотрены пункты 1, 2, 3, 4 исходной постановки, приведено обобщение (пункт 6). Было доказано утверждение (S) (пункт 1). Были найдены все такие p, при которых данное утверждение верно для p-выпуклых функций, и найдено схожее утверждение для p-выпуклых функций, найдены все такие функции h, что строгая выпуклость следует из h-выпуклости, предложены методы решения уравнений с использованием выпуклости. В пункте 6 были приведены утверждения, схожие с неравенством Йенсена для квазивыпуклых и квазивогнутых функций.

Возможно дальнейшее исследование других выпуклых функций специального вида и их свойств. Выпуклые функции особенно легко минимизировать (любой минимум выпуклой функции является глобальным минимумом). За счёт этого, область применения выпуклых функций (в том числе выпуклых функций специального вида): оптимизация в области проектирования, моделирования и т.д.